Die

Fehlerausgleichung nach Mittelgrössen.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hoher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht von

W. Veltmann
aus Bathey.

Marburg.
Universitäts-Buchdruckerei (R. Friedrich).
1885.

Vorwort.

Die Fälle der Ausgleichungsrechnung, welche in dieser Schrift behandelt werden sollen, sind folgende:

A. Bestimmung einer Grösse aus unmittelbaren Beobachtungen.

B. Bestimmung einer Grösse aus linearen Gleichungen, deren Absolutglieder durch unmittelbare Beobachtung gefunden sind.

C. Bestimmung mehrerer Grössen aus linearen Gleichungen, deren Absolutglieder durch unmittelbare Beobachtung erhalten sind.

In dem Falle A wird die gesuchte Grösse gleich dem arithmetischen Mittel aus den beobachteten Werthen gesetzt und hierfür eine einfache und vollkommen genügende Begründung gegeben.

Im Falle B erhält man aus jeder der gegebenen Gleichungen einen Werth der gesuchten Grösse in Form eines Quotienten, dessen Dividend eine der beobachteten Grössen ist. Hier wird nun aus diesen verschiedenen Werthen nicht das arithmetische Mittel genommen, sondern auf andere Weise eine Mittelgrösse gebildet, zu welcher nicht die Werthe der Quotienten, sondern die Dividenden und Divisoren derselben in gleicher Weise beitragen.

In dem Falle C werden aus den gegebenen Gleichungen auf jede mögliche Weise so viele ausgewählt, als Unbekannte zu bestimmen sind und diese daraus berechnet. Man erhält also für jede Unbekannte eine Anzahl Werthe gleich der Anzahl jener Combinationen und zwar in Form von Quotienten, deren Dividenden und Divisoren aus den Coefficienten der Gleichungen gebildete Determinanten sind. Von diesen Quotienten wird nun ganz auf dieselbe Weise eine Mittelgrösse genommen, wie in dem Falle B.

Die Begründung geschieht in den Fällen B und C in ganz ähnlicher Weise, wie im Falle A.

Von den erhaltenen Werthen der Unbekannten wird gezeigt, dass sie in allen drei Fällen übereinstimmen mit denjenigen, welche die Methode der kleinsten Quadrate liefert. Bisher war, den Fall A ausgenommen, nicht bekannt, dass die durch die Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen Werthe der Unbekannten Mittelgrössen sind aus denjenigen, welche man durch beliebige Auswahl von soviel Gleichungen erhält, als zur Bestimmung der Unbekannten nöthig sind.

Zur Beurtheilung der Genauigkeit werden Mittelgrössen gebildet aus wahren Fehlern. Der so erhaltene allgemeine mittlere Fehler der Beobachtungsreihe stimmt mit dem Gauss'schen vollständig überein. Der mittlere Fehler einer Unbekannten ist von dem Gauss'schen in dem von der Zahl der Beobachtungen abhängigen Factor verschieden.

Die Ausgleichung unmittelbarer Beobachtungen einer Grösse durch das arithmetische Mittel erscheint also hier nicht als ein ganz singulärer Fall der Ausgleichungsrechnung; die übrigen Fälle werden in ganz ähnlicher Weise behandelt. Irgendwelche Voraussetzungen über sogenannte Fehlergesetze werden nicht gemacht; sie sind in dem Falle, der auf das arithmetische Mittel führt, bisher für entbehrlich gehalten worden, in den complicirteren Fällen aber bei dem hier eingeschlagenen Verfahren ebenso überflüssig.

I. Die Mittelgrössen.

§ 1. In einer beliebigen Function $f(a, b, c, \ldots)$, welche für reelle Werthe von $a, b, c \ldots$ ebenfalls reell sei, mögen die Grössen $a, b, c \ldots$ nacheinander mit den Indices $1, 2, 3 \ldots n$ versehen werden, so dass man also die Functionen $f(a_1, b_1, c_1, \ldots)$, $f(a_2, b_2, c_2, \ldots)$, $\cdots$ $f(a_n, b_n, c_n, \ldots)$ erhält. Ferner werde eine algebraische Function F der sämmtlichen Grössen $a_1, b_1, \ldots$; $a_2, b_2, \ldots$; $\cdots$; $a_n, b_n, \ldots$ gebildet, welche in Bezug auf die Indices symmetrisch ist, sich also nicht ändert, wenn irgend zwei der Grössengruppen $a_1, b_1, \ldots$; $a_2, b_2, \ldots$ u. s. w. mit einander vertauscht werden. Wenn dann die Function F zugleich die Eigenschaft hat, dass für beliebige Werthe der $a, b, \ldots$ der Werth derselben nicht kleiner als die kleinste und nicht grösser als die grösste der Functionen f ist, so nennen wir F eine Mittelfunction der Functionen f und irgend einen Werth derselben eine Mittelgrösse der zugehörigen Werthe der Functionen f. Dass sämmtliche Functionen f, oder was dasselbe ist, sämmtliche Grössengruppen $a_1, b_1, \ldots$; $a_2, b_2 \ldots$ u. s. w. zur Bildung dieser Mittelgrösse in gleicher Weise beitragen ist hier ein wesentliches Erforderniss; eine Mittelfunction, für welche obige Symmetrie nicht stattfände, würde für den vorliegenden Zweck nicht geeignet sein.

§ 2. Sind mehrere einzelne Gössen $a_1, a_2 \ldots a_n$ gegeben, so ist eine Mittelfunction obiger Art jede symmetrische Function derselben, deren Werth beständig zwischen der grössten und kleinsten der Grössen a liegt. Die einfachste derartige Function ist das sogenannte arithmetische Mittel der Grössen a

$$M = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Nimmt man zu den Grössen noch eine weitere $a_{n+1} = M + \delta$ hinzu, welche also um eine positive oder negative Grösse δ von dem arithmetischen Mittel der übrigen verschieden ist, so ist das arithmetische Mittel aus den $n+1$ Grössen

$$= \frac{a_1 + a_2 \ldots + a_n + M + \delta}{n+1} = M + \frac{\delta}{n+1}.$$

Die neue Mittelgrösse unterscheidet sich also von der früheren nur um $\frac{\delta}{n+1}$, und wenn daher n ziemlich gross ist, so ist der Unterschied, selbst für den Fall, dass δ beträchtlich sein sollte, nur sehr gering. Das arithmetische Mittel aus einer beträchtlichen Anzahl von Grössen wird demnach durch Hinzufügung einer von diesem Mittel verschiedenen Grösse nur um einen geringen Bruchtheil des Unterschiedes geändert. Gleiches gilt offenbar, wenn mehrere Grössen hinzugefügt werden, deren Anzahl im Verhältniss zur ganzen Anzahl nur gering ist.

§ 3. Zu beliebigen Brüchen $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots \frac{b_n}{a_n}$, deren Zähler und Nenner reelle Zahlen sind, ist eine für die Anwendung in der Ausgleichungsrechnung sehr geeignete Mittelfunction die folgende:

$$M = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{a_1 a_1 + a_2 a_2 + \ldots + a_n a_n}.$$

Dass dieselbe einen Mittelwerth zwischen dem grössten und kleinsten der Brüche liefert, folgt aus einem bekannten Satze über Mittelgrössen, wenn man die Brüche $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots \frac{b_n}{a_n}$ auf die Form $\frac{a_1 b_1}{a_1^2}, \frac{a_2 b_2}{a_2^2}, \ldots \frac{a_n b_n}{a_n^2}$ und zugleich den Ausdruck für M auf die Form

$$\frac{a_1^2 \frac{a_1 b_1}{a_1^2} + a_2^2 \frac{a_2 b_2}{a_2^2} \ldots + a_n^2 \frac{a_n b_n}{a_n^2}}{a_1^2 + a_2^2 \ldots + a_n^2}$$

bringt.

Fügt man noch einen Bruch

$$\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}(M+\delta)}{a_{n+1}},$$

welcher sich von obigem Mittelwerth M um δ unterscheidet, hinzu, so ist der Mittelwerth aus den $n+1$ Brüchen

$$= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + a_{n+1}^2 (M+\delta)}{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + a_{n+1}^2} = M + \frac{a_{n+1}^2 \delta}{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + a_{n+1}^2}.$$

Wenn also n ziemlich gross ist und $a_1, a_2, \ldots a_n, a_{n+1}$ miteinander vergleichbare Grössen sind, so wird dieser Mittelwerth von dem vorigen nur um einen geringen Bruchtheil des δ verschieden sein. Zufügen oder Weglassen eines einzelnen Bruches oder auch mehrerer, deren Anzahl im Vergleich zur ganzen Anzahl nur gering ist, wird also auch hier auf den Werth des Mittels nur von geringem Einfluss sein.

§ 4. Soll eine Mittelgrösse nicht der wirklichen, sondern der Absolutwerthe mehrerer Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$ bestimmt werden, so erhält man eine solche am einfachsten, indem man die Quadratwurzel nimmt aus dem arithmetischen Mittel der Quadrate, also

$$M = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$$

Auch hier wird das Zufügen oder Weglassen einiger aber verhältnissmässig weniger Grössen nur geringen Einfluss haben.

II. Die Determinanten.

§ 5. Eine Zusammenstellung von Zahlen

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array}$$

soll eine rectanguläre Zahlentafel oder einfach Zahlentafel und wenn $m = n$ ist, eine quadratische Zahlentafel genannt werden. Sind m und n verschieden, so werden Längsreihen und Querreihen unterschieden, derart dass erstere mehr Zahlen enthalten als letztere. Von einer quadratischen Zahlentafel kann in bekannter Weise eine Determinante gebildet werden.

Sind m und n verschieden und ist p die kleinere von diesen beiden Zahlen, so kann aus irgend welchen p Querreihen in irgend welcher Reihenfolge genommen eine quadratische Tafel und von dieser die Determinante gebildet werden. Sämmtliche derartige Determinanten, welche man erhält, in dem man je p Querreihen nur in einer bestimmten aber beliebigen von den verschiedenen Reihenfolgen nimmt, stellen das System der Combinations-Determinanten der Tafel dar.

Unter dem Producte zweier Tafeln von gleicher Länge und gleicher Breite

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{array}$$

soll die quadratische Tafel

$$\begin{array}{cccc} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \ldots & s_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n1} & s_{n2} & \ldots & s_{nn} \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{cccc} s_{11} & s_{21} & \ldots & s_{n1} \\ s_{12} & s_{22} & \ldots & s_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{1n} & s_{2n} & \ldots & s_{nn} \end{array}$$

verstanden werden, in welcher, wenn $m > n$,

$$s_{ij} = a_{1i}\, b_{1j} + a_{2i}\, b_{2j} + \ldots + a_{mi}\, b_{mj}$$

und wenn $n > m$,

$$s_{ij} = a_{i_1} b_{j1} + a_{i_2} b_{j2} + \ldots + a_{in} b_{jn}$$

ist. Es wird also zeilen- oder colonnenweise multiplicirt, je nachdem die Zeilen oder die Colonnen länger sind. Ob das Resultat zeilenweise oder colonnenweise hingeschrieben wird, ist gleichgültig weil $s_{ij} = s_{ji}$, also die erhaltene quadratische Tafel symmetrisch ist. Unter der Determinante des Products der beiden Tafeln ist die Determinante der erhaltenen quadratischen Tafel $\Sigma \pm s_{11} \ldots s_{nn}$ zu verstehen. In entsprechender Weise kann das Product einer Tafel mit sich selbst und dessen Determinante gebildet werden.

Stellt man von jeder der beiden Tafeln

$$\begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{matrix}$$

sämmtliche Combinationsdeterminanten dar, multiplicirt je zwei aus gleichnummerirten Querreihen in gleicher Reihenfolge gebildete Combinationsdeterminanten der beiden Tafeln und addirt diese Producte, so soll die erhaltene Summe die Summe der Producte der paarweise multiplicirten Combinationsdeterminanten der beiden Tafeln genannt werden. Auf die Reihenfolge der Querreihen in den einzelnen Determinanten kommt es dabei nicht an, da diese Reihenfolge in den beiden Factoren eines Productes dieselbe, also weder das Vorzeichen noch der absolute Werth des Productes davon abhängig ist.

Gleiches gilt für die Summe der Quadrate der Combinationsdeterminanten einer Tafel.

Das Multipliciren der Tafeln und dasjenige ihrer Determinanten soll in der Weise verschieden bezeichnet werden, dass

$$A \qquad B$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{vmatrix}$$

das Product der beiden Tafeln A und B, also

$$\begin{vmatrix} s_{11} & \ldots & s_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ s_{n1} & \ldots & s_{nn} \end{vmatrix}$$

bedeutet, während unter

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{vmatrix}$$

die Summe der Producte der Combinationsdeterminanten (also wenn $m = n$, nur ein solches Product) der beiden Tafeln zu verstehen ist.

§ 6. Eine zur Diagonale symmetrische, quadratische Zahlentafel kann, besondere Fälle ausgenommen, erhalten werden durch Multiplication einer quadratischen Zahlentafel, in welcher die Zahlen an einer Seite der Diagonale $= 0$ sind, mit sich selbst.

Beweis. In der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdot\cdot & \alpha_{1n} \\ & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdot\cdot & \alpha_{2n} \\ & & \alpha_{33} & \cdot\cdot & \alpha_{3n} \\ & & & \cdot\cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & \alpha_{nn} \end{vmatrix}^2 \quad \ldots (1)$$

sei die Tafel links symmetrisch, $a_{ij} = a_{ji}$. Die α sind so zu bestimmen, dass, wenn man Itens in der Tafel rechts die erste Colonne mit der ersten, mit der zweiten, mit der dritten, u. s. w. multiplicirt, a_{11}, a_{12} etc. erhalten werden, ebenso IItens durch Multiplication der zweiten Colonne mit der zweiten, der dritten u. s. w. a_{22}, a_{23} etc. entstehen; u. s. w. Also

I.	II.	III.
$\alpha_{11}\alpha_{11} = a_{11}$	$\alpha_{12}\alpha_{12} + \alpha_{22}\alpha_{22} = a_{22}$	$\alpha_{13}\alpha_{13} + \alpha_{23}\alpha_{23} + \alpha_{33}\alpha_{33} = a_{33}$
$\alpha_{11}\alpha_{12} = a_{12}$	$\alpha_{12}\alpha_{13} + \alpha_{22}\alpha_{23} = a_{23}$	$\alpha_{13}\alpha_{14} + \alpha_{23}\alpha_{24} + \alpha_{33}\alpha_{34} = a_{34}$
. .	. . .	. . .
. .	. . .	. . .
$\alpha_{11}\alpha_{1n} = a_{1n}$	$\alpha_{12}\alpha_{1n} + \alpha_{22}\alpha_{2n} = a_{2n}$	$\alpha_{13}\alpha_{1n} + \alpha_{23}\alpha_{2n} = \alpha_{33}\alpha_{3n} = a_{3n}$ u. s. w.

Aus I. bestimmen sich $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots \alpha_{1n}$; dann aus II α_{22}, $\alpha_{23} \ldots \alpha_{2n}$; u. s. w. Sollten von den Grössen α_{11}, α_{22}, α_{33}, $\ldots$ $\alpha_{n-1,n-1}$ irgend welche $= 0$ werden, so würden sich Bedingungsgleichungen zwischen den a ergeben, der Satz also nicht mehr allgemeine Geltung haben.

Findet die Gleichung (1) statt, so gilt nach einem bekannten Determinantensatz dieselbe Gleichung auch für die entsprechenden Determinanten, also

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdot\cdot & \alpha_{1n} \\ & \alpha_{22} & \cdot\cdot & \alpha_{2n} \\ & & \cdot\cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & \alpha_{nn} \end{vmatrix}^2$$

§ 7. Eine beliebige quadratische Zahlentafel lässt sich darstellen als das Product von zwei quadratischen Zahlentafeln, die in der Diagonale übereinstimmen und an einer Seite derselben nur Nullen haben.

Beweis. Aus der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\,a_{12}\,\ldots\,a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\,\ldots\,a_{2n} \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ a_{n1}\,a_{n2}\,\ldots\,a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\,\beta_{12}\,\beta_{13}\,\ldots\,\beta_{1n} \\ \alpha_{22}\,\beta_{23}\,\ldots\,\beta_{2n} \\ \ldots\ldots \\ \ldots \\ \alpha_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11}\,\gamma_{12}\,\gamma_{13}\,\ldots\,\gamma_{1n} \\ \alpha_{22}\,\gamma_{23}\,\ldots\,\gamma_{2n} \\ \ldots\ldots \\ \ldots \\ \alpha_{nn} \end{vmatrix} \quad \ldots (2)$$

ergeben sich zur Bestimmung der α, β und γ folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} \alpha_{11}\,\alpha_{11} = a_{11} & & \beta_{12}\,\gamma_{12} + \alpha_{22}\,\alpha_{22} = a_{22} & & \\ \alpha_{11}\,\gamma_{12} = a_{12} & \alpha_{11}\beta_{12} = a_{21} & \beta_{12}\,\gamma_{13} + \alpha_{22}\,\gamma_{23} = a_{23} & \beta_{13}\,\gamma_{12} + \beta_{23}\,\alpha_{22} = a_{32} & \\ \alpha_{11}\,\gamma_{13} = a_{13} & \alpha_{11}\beta_{13} = a_{31} & \beta_{12}\,\gamma_{14} + \alpha_{22}\,\gamma_{24} = a_{24} & \beta_{14}\,\gamma_{12} + \beta_{24}\,\alpha_{22} = a_{42} & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \text{u. s. w.} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ \alpha_{11}\,\gamma_{1n} = a_{1n} & \alpha_{11}\beta_{1n} = a_{n1} & \beta_{12}\,\gamma_{1n} + \alpha_{22}\,\gamma_{2n} = a_{2n} & \beta_{1n}\,\gamma_{12} + \beta_{2n}\,\alpha_{22} = a_{n2} & \end{array}$$

Von den Grössen α_{11}, α_{22}, $\ldots$ $\alpha_{n-1,n-1}$ darf auch hier keine $= 0$ werden, wenn sich nicht Bedingungsgleichungen zwischen den a ergeben sollen.

Findet die Gleichung (2) statt, so gilt dieselbe ebenfalls für die entsprechenden Determinanten; es ist also

$$\begin{vmatrix} a_{11}\,\ldots\,a_{1n} \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ a_{n1}\,\ldots\,a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\,\beta_{12}\,\ldots\,\beta_{1n} \\ \alpha_{22}\,\ldots\,\beta_{2n} \\ \ldots\ldots \\ \ldots \\ \alpha_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11}\,\gamma_{12}\,\ldots\,\gamma_{1n} \\ \alpha_{22}\,\ldots\,\gamma_{2n} \\ \ldots\ldots \\ \ldots \\ \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

§ 8. Aus einer quadratischen Zahlentafel kann man dadurch, dass man irgend zwei zusammenstossende Seiten weglässt, vier neue quadratische Tafeln mit einer um 1 kürzeren Seite bilden. Lässt man den ganzen Umfang weg, so erhält man eine Tafel mit einer um 2 kürzeren Seite. Ist nun die ursprüngliche Tafel zur Diagonale symmetrisch, so findet zwischen den Determinanten der sechs Tafeln eine Beziehung statt, welche beispielsweise für eine quadratische Tafel von der Seitenlänge $= 6$ durch folgende Gleichung dargestellt wird.

$$\begin{array}{c} A \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ b_1 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & e_4 & f_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & f_5 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 \end{vmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} B \\ \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ c_2 & c_3 & d_3 & e_3 \\ d_2 & d_3 & d_4 & e_4 \\ e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix} \end{array} =$$

$$\begin{array}{c} C \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_1 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & d_3 & e_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} D \\ \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_2 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ d_2 & d_3 & d_4 & e_4 & f_4 \\ e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & f_5 \\ f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 \end{vmatrix} \end{array} - \begin{array}{c} E \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_2 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ d_2 & d_3 & d_4 & e_4 & f_4 \\ e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & f_5 \end{vmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} F \\ \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & d_3 & e_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \end{vmatrix} \end{array} \quad \ldots (3)$$

Die einzelnen Zahlentafeln (nicht die Determinanten) sind hier durch die Buchstaben A, B, C, D, E, F bezeichnet. E und F entstehen auseinander durch Drehung um die Diagonale; es ist also $|E| = |F|$.

Zum Beweise wird die Gleichung, indem man die symmetrische Tafel A nach § 6 als das Quadrat einer dreiseitigen Tafel darstellt, in folgende Form gebracht.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\varepsilon_1\zeta_1 \\ \beta_2\gamma_2\delta_2\varepsilon_2\zeta_2 \\ \gamma_3\delta_3\varepsilon_3\zeta_3 \\ \delta_4\varepsilon_4\zeta_4 \\ \varepsilon_5\zeta_5 \\ \zeta_6 \end{vmatrix}^2 \quad \begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1\delta_1\varepsilon_1 \\ \beta_2\gamma_2\delta_2\varepsilon_2 \\ \gamma_3\delta_3\varepsilon_3 \\ \delta_4\varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{vmatrix}^2 =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\varepsilon_1 \\ \beta_2\gamma_2\delta_2\varepsilon_2 \\ \gamma_3\delta_3\varepsilon_3 \\ \delta_4\varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{vmatrix}^2 \quad \begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1\delta_1\varepsilon_1\zeta_1 \\ \beta_2\gamma_2\delta_2\varepsilon_2\zeta_2 \\ \gamma_3\delta_3\varepsilon_3\zeta_3 \\ \delta_4\varepsilon_4\zeta_4 \\ \varepsilon_5\zeta_5 \\ \zeta_6 \end{vmatrix}^2 - \quad \begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\varepsilon_1 \\ \beta_2\gamma_2\delta_2\varepsilon_2 \\ \gamma_3\delta_3\varepsilon_3 \\ \delta_4\varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{vmatrix}^2 \quad \begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1\delta_1\varepsilon_1\zeta_1 \\ \beta_2\gamma_2\delta_2\varepsilon_2\zeta_2 \\ \gamma_3\delta_3\varepsilon_3\zeta_3 \\ \delta_4\varepsilon_4\zeta_4 \\ \varepsilon_5\zeta_5 \end{vmatrix}^2 \quad \ldots (4)$$

Die einzelnen Zahlentafeln sind hier mit A', B', C', D', E', F' bezeichnet. In A' sind die Zahlen nach § 6 derart bestimmt, dass A aus A' entsteht, indem man A' colonnenweise mit sich selbst multiplicirt und die Resultate zeilen- oder colonnenweise hinschreibt. Auf gleiche Weise entsteht aber dann B aus B', C aus C', D aus D'. Es ist also nach bekannten Sätzen $|A| = |A'|^2$, $|B| = |B'|^2$ (d. h. = der Summe der Quadrate der fünf Combinationsdeterminanten von B'), $|C| = |C'|^2$, $|D| = |D'|^2$ (d. h. = der Summe der Quadrate der 6 Combinationsdeterminaten von D'). Die Zahlentafel E entsteht, indem man E' mit F' colonnenweise multiplicirt und die Resultate zeilenweise hinschreibt. Mithin ist $|E| = |E'||F'|$; da aber $E = F$, so ist auch $|F| = |E'||F'|$ und somit $|E||F| = |E'|^2 |F'|^2$. Die Gleichung (4) ist also in der That eine Transformation der Gl. (3), und es kann desshalb jetzt für erstere statt für letztere der Beweis geführt werden.

Es ist nun

$$|A'|^2 = \alpha_1^2\beta_2^2\gamma_3^2\delta_4^2\varepsilon_5^2\zeta_6^2$$
$$|C'|^2 = \alpha_1^2\beta_2^2\gamma_3^2\delta_4^2\varepsilon_5^2$$
$$|E'|^2 = \alpha_1^2\beta_2^2\gamma_3^2\delta_4^2\varepsilon_5^2$$

Setzt man dies in (4) ein und dividirt dann die Gleichung durch $\alpha_1^2\beta_2^2\gamma_3^2\delta_4^2\varepsilon_5^2$, so erhält man

$$\zeta_6^2 |B'|^2 = |D'|^2 - |F'|^2$$

also, wenn man für $|B'|^2$ und $|D'|^2$ die dadurch bezeichneten Summen von Determinantenquadraten setzt:

$$\zeta_6^2 \begin{vmatrix} \beta_2\gamma_2\delta_2\varepsilon_2 \\ \gamma_3\delta_3\varepsilon_3 \\ \delta_4\varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{vmatrix}^2 + \zeta_6^2 \begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1\delta_1\varepsilon_1 \\ \gamma_3\delta_3\varepsilon_3 \\ \delta_4\varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{vmatrix}^2 + \zeta_6^2 \begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1\delta_1\varepsilon_1 \\ \beta_2\gamma_2\delta_2\varepsilon_2 \\ \delta_4\varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{vmatrix}^2 + \zeta_6^2 \begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1\delta_1\varepsilon_1 \\ \beta_2\gamma_2\delta_2\varepsilon_2 \\ \gamma_3\delta_3\varepsilon_3 \\ \varepsilon_5 \end{vmatrix}^2 + \zeta_6^2 \begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1\delta_1\varepsilon_1 \\ \beta_2\gamma_2\delta_2\varepsilon_2 \\ \gamma_3\delta_3\varepsilon_3 \\ \delta_4\varepsilon_4 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_2\gamma_2\delta_2\varepsilon_2\zeta_2 \\ \gamma_3\delta_3\varepsilon_3\zeta_3 \\ \delta_4\varepsilon_4\zeta_4 \\ \varepsilon_5\zeta_5 \\ \zeta_6 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1\delta_1\varepsilon_1\zeta_1 \\ \gamma_3\delta_3\varepsilon_3\zeta_3 \\ \delta_4\varepsilon_4\zeta_4 \\ \varepsilon_5\zeta_5 \\ \zeta_6 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1\delta_1\varepsilon_1\zeta_1 \\ \beta_2\gamma_2\delta_2\varepsilon_2\zeta_2 \\ \delta_4\varepsilon_4\zeta_4 \\ \varepsilon_5\zeta_5 \\ \zeta_6 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1\delta_1\varepsilon_1\zeta_1 \\ \beta_2\gamma_2\delta_2\varepsilon_2\zeta_2 \\ \gamma_3\delta_3\varepsilon_3\zeta_3 \\ \varepsilon_5\zeta_5 \\ \zeta_6 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1\delta_1\varepsilon_1\zeta_1 \\ \beta_2\gamma_2\delta_2\varepsilon_2\zeta_2 \\ \gamma_3\delta_3\varepsilon_3\zeta_3 \\ \delta_4\varepsilon_4\zeta_4 \\ \zeta_6 \end{vmatrix}^2 +$$

$$+ \begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1\delta_1\varepsilon_1\zeta_1 \\ \beta_2\gamma_2\delta_2\varepsilon_2\zeta_2 \\ \gamma_3\delta_3\varepsilon_3\zeta_3 \\ \delta_4\varepsilon_4\zeta_4 \\ \varepsilon_5\zeta_5 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} \beta_1\gamma_1\delta_1\varepsilon_1\zeta_1 \\ \beta_2\gamma_2\delta_2\varepsilon_2\zeta_2 \\ \gamma_3\delta_3\varepsilon_3\zeta_3 \\ \delta_4\varepsilon_4\zeta_4 \\ \varepsilon_5\zeta_5 \end{vmatrix}^2$$

Die beiden letzten Glieder rechts heben sich fort. In der dann noch übrig bleibenden Gleichung stimmt das 1., 2., 3., 4., 5. Glied links überein resp. mit dem 1., 2., 3., 4., 5. Gliede rechts.

III. Das allgemeine Princip der Ausgleichungsrechnung.

§ 9. In der Theoria motus corp. coelest. lib. II sect. III hat Gauss mit Hülfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung von dem Fundamentalsatze der Methode der kleinsten Quadrate eine Begründung zu geben gesucht, welche schon durch die künstliche Weise, wie das arithmetische Mittel genöthigt wird, ein sogenanntes Fehlergesetz zu liefern, verräth, das es nicht die der Natur des Gegenstandes entsprechende sein kann. Überdies wird, um von dem arithmetischen Mittel ausgehen zu können, ein Satz als Axiom zu Grunde gelegt, dessen Berechtigung, als solches zu gelten, mehr als zweifelhaft ist. Hauptsächlich aus letzterem Grunde ist Gauss selbst von dieser Begründungsweise nicht befriedigt gewesen und er hat deshalb in der späteren Abhandlung Theoria combin. observationum etc. einen ganz anderen aber freilich nicht minder künstlichen und indirecten Weg eingeschlagen. Wie wenig in der That die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu einer wirklichen Begründung des Ausgleichungsverfahrens nach der Methode der kleinsten Quadrate sich eignet, möge hier gezeigt werden durch Anwendung des von Gauss in der Theoria motus etc. lib. II sect. III art. 176 aufgestellten Wahrscheinlichkeitssatzes auf ein Beispiel, welches einfach genug ist, damit nicht hinter der grossen unübersehbaren Allgemeinheit des Satzes die (wenigstens mit Rücksicht auf die in Rede stehende Anwendung desselben so zu nennenden) Mängel desselben sich verbergen. Der Satz lautet:

Si posita aliqua hypothesi H probabilitas alicuius eventus determinati E est $= h$, posita autem hypothesi alia H' illam excludente et per se aeque probabili eiusdem eventus probabilitas est $= h'$: tum dico, quando eventus E revera apparuerit, probabilitatem, quod H fuerit vera hypothesis, fore ad probabilitatem, quod H' fuerit hypothesis vera, ut h ad h'.

Man habe nun 100 Metallstäbe von den Längen $s_1 = 901$, $s_2 = 902$, $\ldots s_{100} = 1000$ Millimeter. Von diesen Stäben werde einer durch das Loos bestimmt, 12 mal gemessen und zu den übrigen wieder hinzugefügt. Diese Operation, d. h. Bestimmung eines Stabes durch das Loos, 12 malige Messung desselben und Zurücklegung zu den übrigen, werde 100^n mal wiederholt, wo die ganze Zahl n ziemlich gross wird sein müssen, damit das sogenannte Gesetz der grossen Zahl zur Geltung komme. Wir nehmen an, dass immer nur ganze Zehntelmillimeter gemessen werden, so dass also Bruchteile von 0,1 mm als Messungsfehler nicht vorkommen. Das Fehlergesetz möge durch eine gerade Function φ dargestellt sein. Wenn also eine Grösse k mal beobachtet wird, wo k eine sehr grosse Zahl ist und unter diesen Beobachtungen eine Anzahl $= k'$ ist, die einen Fehler $= f$ enthalten, so ist $\frac{k'}{k} = \varphi(f)$. Die Function φ hat hier einen endlichen Werth, weil f keine continuirliche, sondern eine nur von Zehntel zu Zehntel Millimeter veränderliche Grösse ist.

$t_1, t_2, \ldots t_{12}$ seien 12 verschiedene Längen. Da die Zahl der Ausloosungen 100^n beträgt, so kommt jeder der 100 Stäbe 100^{n-1} mal heraus. Irgend einer der Stäbe s_m wird also 100^{n-1} Messungsreihen von je 12 Messungen unterworfen. Dass die erste von den 12 Messungen eine Länge $= t_1$ liefert, kommt bei einer Anzahl $= \varphi(s_m - t_1) \cdot 100^{n-1}$ von den 100^{n-1} Messungsreihen vor. Dass dann die zweite Messung die Länge t_2 liefert, wird sich bei $\varphi(s_m - t_2) \cdot \varphi(s_m - t_1) \cdot 100^{n-1}$ von den $\varphi(s_m - t_1)\ 100^{n-1}$ Messungsreihen ereignen; u. s. w. Dass die Längen $t_1, t_2, \ldots t_{12}$ nacheinander erhalten werden, findet statt bei einer Anzahl

$$\varphi(s_m - t_1) \cdot \varphi(s_m - t_2) \ldots \varphi(s_m - t_{12}) \cdot 100^{n-1} = P_m$$

von den 100^{n-1} Messungsreihen. In jeder anderen Reihenfolge erscheinen aber diese Längen ebenso oft. Dass die 12 Längen überhaupt bei einer Messungsreihe erhalten werden, gleichviel in welcher Reihenfolge, wird demnach bei einer Anzahl $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . 12\, P_m$ von den 100^{n-1} Messungsreihen zu erwarten sein. Setzen wir also voraus, dass die wirkliche Länge des Stabes s_a sei (hypothesis H), so ist die Wahrscheinlichkeit, dass 12 malige Messung die Längen t_1, t_2, t_{12} liefert (eventus E)

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . 12\, P_a}{100^{n-1}} (= h),$$

und wenn wir als wirkliche Länge des Stabes s_b voraussetzen (hypothesis H'), so ist die Wahrscheinlichkeit desselben Messungsergebnisses

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . 12\, P_b}{100^{n-1}} (= h').$$

Wenden wir dies nun auf jeden der Stäbe an, so ist die Gesammtzahl derjenigen von den 100^n Messungsreihen, bei welchen die Längen $t_1, t_2, \ldots t_{12}$ erhalten werden

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 12 (P_1 + P_2 + \ldots + P_{100})$$

Unter diesen Fällen gibt es eine Anzahl $= 1 \cdot 2 \ldots . 12\ P_a$, in welchen die wirkliche Länge des Stabes $= s_a$ und eine Anzahl $= 1 \cdot 2 \ldots . 12 P_b$, in welchen die wirkliche Länge des Stabes s_b ist. Sobald also die bei einer Messungsreihe gefundenen Längen $= t_1, t_2, \ldots . t_{12}$ sind (quando eventus E revera apparuerit), ist die mathematische Wahrscheinlichkeit, dass die wirkliche Länge des Stabes s_a sei

$$= \frac{P_a}{P_1 + P_2 + \ldots . + P_{100}}$$

und die Wahrscheinlichkeit dass sie s_b sei

$$= \frac{P_b}{P_1 + P_2 + \ldots . + P_{100}}.$$

Demnach ist das Verhältniss der beiden Wahrscheinlichkeiten

$$= P_a : P_b = \frac{1 \cdot 2 \ldots . 12\, P_a}{100^{n-1}} : \frac{1 \cdot 2 \ldots . 12\, P_b}{100^{n-1}} = h : h',$$

dem Gauss'schen Satze gemäss. Von den Producten $P_1, P_2, \ldots . P_{100}$ wird nun irgend eines, etwa P_q, das grösste sein. Die Länge s_q würde man also dann dem gemessenen Stabe als die wahrscheinlichste beilegen. Sie ist bekanntlich, wenn man das Gauss'sche Fehlergesetz zu Grunde legt, nichts Anderes, als das arithmetische Mittel aus $t_1, t_2, \ldots . t_{12}$.

Hiernach würde also die Wahrscheinlichkeitsrechnung für das arithmetische Mittel eine Begründung liefern, welche in folgender Weise kurz zusammengefasst werden kann.

In einem bestimmten Falle sind bei 10 oder 12 Messungen die Längen $t_1, t_2 \ldots$ erhalten worden. Wäre man nun im Stande, noch einige weitere Millionen solcher Messungsreihen auszuführen, so würden unter diesen einige Tausend sein, bei welchen man ebenfalls die Längen $t_1, t_2 \ldots t_{12}$ fände. Wenn man unter diesen die Zahl derjenigen bestimmte, wo die wirkliche Länge des Stabes s_1, wo sie s_2 u. s. w. wäre, so fände man, dass s_q am häufigsten vorkäme, und aus diesem Grunde soll in dem betreffenden einzelnen Falle die Länge des Stabes $= s_q$ genommen werden.

Ohne Zweifel würde man, wenn man für das arithmetische Mittel keine weitere Begründung hätte, als diese, sich hierdurch allein kaum veranlasst sehen, dasselbe anzuwenden. Man pflegt nun freilich nicht, wie hier geschehen, das arithmetische Mittel aus dem Gauss'schen Fehlergesetz, sondern umgekehrt dieses aus jenem herzuleiten. Nachdem man aber auf diesem Wege zu dem Gesetze gelangt ist, ist die Anwendung desselben zur Ermittelung der Werthe der Unbekannten in den complicirteren Fällen der Ausgleichungsrechnung ganz

von derselben Art wie obige Herleitung des arithmetischen Mittels. Der Unterschied ist nur der, dass man noch erheblich grössere Zahlen zu Grunde legen muss und die Wahrscheinlichkeitsbeziehungen noch verwickelter sind. Wenn also schon in dem Falle des arithmetischen Mittels, welcher hier der Einfachheit wegen als Beispiel gewählt wurde, die Wahrscheinkeitsrechnung zu einer sehr wenig befriedigenden Begründung führt, so wird dieselbe um so mehr zu verwerfen sein als Grundlage des Ausgleichungsverfahrens in den complicirteren Fällen.

Es kann deshalb nicht befremden, wenn verschiedene neuere Bearbeiter der Ausgleichungsrechnung, besonders solche, welche ein vorwiegend praktisches Ziel im Auge haben, auf eine Begründung von so zweifelhaftem Werthe, wie diejenige durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung, grössenteils oder ganz verzichten. Was aber dann an die Stelle derselben gesetzt wird, ist kaum als eine genügende Grundlage zu betrachten, um das Ausgleichungsverfahren mit dem nöthigen Vertrauen auf die Zuverlässigkeit desselben anwenden zu können. Wenn man nämlich davon ausgeht, dass bei genauen Beobachtungen und genauen Werthen der Unbekannten die Summe der Fehlerquadrate gleich Null sein würde und hieraus nun schliesst, dieselbe müsse bei ungenauen Beobachtungen wenigstens möglichst klein sein, so ist die Berechtigung dieses Schlusses offenbar eine sehr anfechtbare. Noch weniger unmittelbar überzeugend ist die von Gauss in der Theoria combinationis etc. angewandte Begründungsweise, welche das Minimum des sogenannten error medius metuendus der einzelnen Unbekannten als fundamentale Ausgleichungsbedingung hinstellt.

Mit Unrecht hat man die Schwierigkeiten, welche sich einer befriedigenden Theorie des gebräuchlichen Ausgleichungsverfahrens bisher entgegenstellten, als in der Natur des Gegenstandes begründet angesehen. Dieselben haben lediglich ihren Grund darin, dass man für die theoretische Behandlung des Ausgleichungsproblems ungeeignete Ausgangspunkte gewählt hat. Wenn man hierbei die Unterscheidung macht, ob dieses oder jenes Fehlergesetz Geltung habe oder nicht und demgemäss den Resultaten eine verschiedene Bedeutung beilegt, so ist diese Unterscheidung eine ziemlich zwecklose. Von einer so unsicheren Sache, wie die sogenannten Fehlergesetze, darf die Lösung einer Ausgleichungsaufgabe nicht abhängig sein. Sogar die Abwesenheit einseitig wirkender Fehlerursachen wird sich in vielen Fällen der Anwendung des Ausgleichungsverfahrens nicht mit Bestimmtheit behaupten lassen. Wo hier in allen Fällen ohne Ausnahme und ohne irgend welche gewagte Voraussetzungen über Fehlergesetze die wahre Begründung zu suchen ist, das wird sofort klar, wenn man den einfachsten Fall der Ausgleichungsrechnung, der zu dem arithmetischen Mittel führt, als Prüfungsmittel für verschiedene Begründungsweisen benutzt. Dass die gesuchte Grösse in diesem Falle gleich dem arithmetischen Mittel aus den Beobachtungen genommen werden muss, ist so

unmittelbar einleuchtend, dass man eine förmliche Begründung kaum für nöthig hält. Genügende sachgemässe Gründe für das, worauf es hier ankommt, wenn auch nicht für die der Gauss'schen Theorie als Axiom zu Grunde liegende Behauptung eines sogenannten Wahrscheinlichkeitsmaximums lassen sich übrigens hier angeben. Wenn es sich blos um diesen Fall handelte, so würde Niemand hier die geringste Schwierigkeit finden; es würde nichts ferner liegen, als der Gedanke, die Wahrscheinlichkeitsrechnung darauf anzuwenden. Ebenso wenig würde man es für nöthig halten, den Nachweis zu liefern, dass die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum ist; zu der Überzeugung von der Zweckmässigkeit der Ausgleichung nach dem arithmetischen Mittel würde hierdurch nichts hinzugefügt werden. Wenn dagegen von dem ausgeglichenen Werthe nichts weiter bekannt wäre, als dass er jene Summe zu einem Minimum macht, so würde dies kaum genügen, um denselben mit dem nöthigen Vertrauen auf hinreichende Genauigkeit statt des wahren Werthes anwenden zu können. Denn angenommen, der aus der Bedingung des Minimums der Summe der Fehlerquadrate folgende Werth läge nicht zwischen dem grössten und kleinsten durch Beobachtung gefundenen, so möchte derselbe noch so vielen Wahrscheinlichkeitsbedingungen u. s. w. genügen, man würde ihm ganz sicher einen beliebigen innerhalb jener Gränzen liegenden Werth vorziehen. Ganz ebenso verhält es sich aber auch in den übrigen Fällen der Ausgleichungsrechnung. Die ausgeglichenen Werthe der Unbekannten sind auch hier Mittelgrössen, deren Zweckmässigkeit ebenso unmittelbar einleuchtend oder ebenso einfach zu begründen ist, wie in dem einfachsten Falle die des arithmetischen Mittels. Minimum von Quadratsummen, Wahrscheinlichkeitsbeziehungen u. s. w. sind hier ebenso überflüssig wie dort. Die Eigenschaft der ausgeglichenen Werthe der Unbekannten, Mittelwerthe zu sein zwischen denjenigen Werthen, welche man durch beliebige Combination der Fehlergleichungen erhält, hat deshalb auch als das wahre Princip der Ausgleichung, das Minimum der Summe der Fehlerquadrate dagegen nur als secundäre Folgerung zu gelten. Dass Mittelgrössen sich auch zur Bestimmung mittlerer (nicht sogenannter wahrscheinlicher) Fehler eignen werden, liegt schon in dem Begriff derselben.

Übrigens soll hiermit nicht gesagt sein, dass es nicht eingermassen in der Natur der Ausgleichungsprobleme liegt, dass man durch dieselben auf Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen geführt wird. Wenn z. B. eine grössere Anzahl von Beobachtungen einer Grösse mit Ausnahme einer einzigen fast genau übereinstimmen, diese eine aber bedeutend abweicht, so ist man offenbar berechtigt, von einer grossen Wahrscheinlichkeit zu sprechen, dass letztere Beobachtung sehr fehlerhaft ist. Man wird dieselbe deshalb entweder ganz ausscheiden, oder ihr nur einen geringen Einfluss auf das Ausgleichungsresultat gestatten. Dieses Princip liegt auch der in gegenwärtiger Schrift gegebenen Theorie der Ausgleichung nach Mittelgrössen mit zu Grunde. Dasselbe ist aber sehr verschieden von der Art von

Wahrscheinlichkeitsrechnerei, durch welche man zu der Methode der kleinsten Quadrate zu gelangen pflegt. Letztere lässt, so wie sie gewöhnlich dargestellt wird, gar nicht erkennen, dass die durch dieselbe erhaltenen Werthe der Unbekannten Mittelgrössen sind, und es sind deshalb die Gründe für die grössere oder geringere Wahrscheinlichkeit dort ganz andere als hier.

IV. Bestimmung einer Grösse durch unmittelbare Beobachtung.

§ 10. Für eine Grösse x seien durch unmittelbare Messung die Werthe $l_1, l_2, \ldots l_m$ gefunden worden. Wenn die Messungen genau wären, so müssten diese Werthe einander gleich sein. Subtrahirt man also jeden derselben von jedem vorhergehenden, so würden diese Differenzen $= 0$ sein müssen. Sind die Messungen nicht genau, so werden diese Differenzen um so näher gleich 0 sein, je geringer die Ungenauigkeit ist. Vergleicht man also mehrere solche Messungsreihen mit einander, so wird eine nach § 4 gebildete Mittelgrösse der absoluten Werthe dieser Differenzen als das relative Mass der durchschnittlichen (dieses Wort in einem andern als dem gewöhnlichen Sinne genommen) Ungenauigkeit betrachtet werden können. Bezeichnen wir dasselbe mit M, so ist also

$$M = \sqrt{\frac{(l_1-l_2)^2+(l_1-l_3)^2+\ldots+(l_1-l_n)+(l_2-l_3)^2+\ldots}{\frac{1}{2}m(m-1)}} \quad \ldots (5)$$

Der Werth dieses Ausdrucks, welcher eine Mittelgrösse ist aus wahren Fehlern, lässt also einigermassen beurtheilen, mit welcher Sorgfalt und unter wie günstigen Umständen gemessen worden ist. Sind einige, aber im Verhältnis zur ganzen Anzahl nur wenige Messungen in folge zufälliger Umstände mit grösseren Fehlern behaftet, so wird auch die Zahl der hierdurch grösser gewordenen Differenzenquadrate im Vergleich zur ganzen Anzahl derselben nur gering sein, und der Werth von M wird deshalb nur unerheblich von demjenigen abweichen, welchen er erhielte, wenn man jene ungenauen Beobachtungen ausschlösse.

Die Grösse M ist hier als annährend proportional der Ungenauigkeit der Messungen betrachtet worden. Dies ist jedoch nur unter der Voraussetzung zulässig, dass die Fehler keinen von einer constanten Fehlerursache herrührenden Theil enthalten, da ein solcher auf den Werth von M keinen Einfluss haben würde. Allgemein kann also M nur als das Mass des Widerspruchs zwischen den Beobachtungen bezeichnet werden.

§ 11. Um aus den Beobachtungen einen hinreichend genauen Werth für x ableiten zu können, müssen diese Beobachtungen selbst im Allgemeinen,

also mit einer im Verhältniss zur ganzen Anzahl nur geringen Zahl von Ausnahmen hinreichend genau sein. Nennen wir X den aus der Ausgleichung resultirenden Werth von x, so können wir

$$X = \frac{l_1 + l_2 \ldots + l_m}{m} \ldots (6)$$

setzen.

Wenn die Ungenauigkeiten der l kleine Grössen von gleicher Ordnung wären, so dass also die Differenz der Absolutwerthe irgend zweier Fehler im Vergleich zu einem einzelnen eine kleine Grösse höherer Ordnung wäre, so könnte man statt des arithmetischen Mittels auch irgend eine der Grössen l für x nehmen. Sind aber einzelne l in folge besonderer Umstände erheblich ungenauer als die übrigen, so würde man bei willkürlicher Auswahl möglicherweise gerade eine von diesen treffen können, wo dann x um die ganze Ungenauigkeit dieser Grösse fehlerhaft würde. In das arithmetische Mittel dagegen geht nach § 2 nur der m^{te} Teil eines solchen Fehlers ein, und es wird also das Resultat wesentlich ebenso genau sein, als hätte man die betreffenden schlechten Beobachtungen ausgeschlossen. Letzteres würde übrigens in diesem einfachsten Falle geschehen können, da man hier leicht die besonders stark von den übrigen abweichenden Beobachtungsresultate ermitteln kann. Dies würde jedoch vor der Ausgleichung nach dem arithmetischen Mittel kaum einen Vorzug haben, weshalb man dieses immer anwenden wird. Der Vorzug desselben vor einer willkürlichen Auswahl und also der Hauptgrund für seine Anwendung besteht demnach darin, dass der Einfluss einzelner schlechter Beobachtungen sich von selbst auf ein unschädliches Mass reducirt. Wollte man blos eine einzige Beobachtung machen, so käme das auf dasselbe hinaus, wie eine willkürliche Auswahl aus mehreren und das Resultat würde also ebenfalls weniger zuverlässig sein, als das arithmetische Mittel aus einer grösseren Anzahl. Als weiteren Grund für die Anwendung des letzteren kann man anführen, dass die Fehler theils positiv theils negativ sein werden und sich daher in dem arithmetischen Mittel zum Theil vernichten. Um zu beurtheilen, in welchem Grade dies stattfindet, müsste die Zahl der Beobachtungen in Betracht gezogen werden, also ein hierauf bezügliches Gesetz bekannt sein. Wenn die Zahl der Beobachtungen sehr gross ist, so sollen positive und negative Fehler von gleicher Grösse in ungefähr gleicher Anzahl vorkommen; der Mittelwerth würde also dann nahezu fehlerfrei sein.

§ 12. Der Ausdruck M in Gleichung (5) lässt sich durch Einführung des durch Gleichung (6) gegebenen Werthes von x in folgender Weise umformen:

$$M = \sqrt{\frac{(X-l_1)^2 + (X-l_2)^2 + \ldots + (X-l_m)^2}{\frac{1}{2}(m-1)}} \ldots (7)$$

wie leicht direct gezeigt oder auch aus späteren allgemeinen Formeln, welche diesen besonderen Fall mit umfassen, abgeleitet werden kann. Demnach ist M (abgesehen von dem Factor $\frac{1}{2}$) nichts anderes, als der Gauss'sche mittlere Fehler einer Beobachtung. Berücksichtigt man, dass nach Gauss der mittlere Fehler der Differenz zweier l gleich ist $\sqrt{2}$ mal dem Fehler eines einzelnen l, so ist die Übereinstimmung eine vollständige.

V. Bestimmung einer Grösse aus nicht unmittelbaren Beobachtungen.

§ 13. m Grössen $a_1, a_2, \ldots a_m$ werden willkürlich angenommen, ebenso eine Grösse x. Dann werden m Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 x - \lambda_1 &= 0 \\ a_2 x - \lambda_2 &= 0 \\ \cdot \quad &\cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad &\cdot \quad \cdot \\ a_m x - \lambda_m &= 0 \end{aligned}$$

berechnet. Diese Grössen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$ werden auf Metallstäben abgetragen und dann wieder durch Messung bestimmt. Man wird Grössen $l_1, l_2 \ldots l_m$ finden, welche von $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$ etwas verschieden sind und den Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 x - l_1 &= 0 \\ a_2 x - l_2 &= 0 \\ \cdot \quad &\cdot \quad \cdot \quad \ldots (8) \\ \cdot \quad &\cdot \quad \cdot \\ a_m x - l_m &= 0 \end{aligned}$$

nicht vollständig genügen. Wäre genau gemessen worden, so müssten je zwei der Gleichungen (8) mit einander verträglich, d. h. ihre Determinante müsste $= 0$ sein. Sämmtliche Combinationsdederminanten der Tafel

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & \ldots & \ldots & a_m \\ l_1 & l_2 & \ldots & \ldots & l_m \end{matrix}$$

würden $= 0$ sein müssen. Wegen der Messungsfehler werden dieselben von 0 etwas verschieden sein, aber um so weniger, je kleiner die Messungsfehler sind. Die nach § 4 gebildete Mittelgrösse der absoluten Werthe dieser Combinationsdeterminanten

$$\sqrt{\frac{\left|\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ l_1 & l_2 \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} a_1 & a_3 \\ l_1 & l_3 \end{matrix}\right|^2 + \ldots}{\frac{1}{2} m (m-1)}}$$

kann demnach für mehrmalige Wiederholung ein und derselben Messungsreihe, wo also die Coefficienten a immer dieselben sind, als relatives Mass der Ungenauigkeit dienen. Für beliebige Werthe der a dagegen kann jene Mittelgrösse nicht ohne weiteres als Mass der Ungenauigkeit betrachtet werden, da dieselbe in einer Weise von den a abhängt, in welcher das Ungenauigkeitsmass nicht davon abhängig sein darf. Wenn man nämlich die a z. B. doppelt so gross, x nur halb so gross genommen hätte, wo dann alles Übrige unverändert blieb, so würde man für dieselbe Messungsreihe blos wegen Verschiedenheit vorhergegangener willkürlicher Annahmen die Ungenauigkeit doppelt so gross gefunden haben. Der Radicand obiger Wurzel muss also noch durch eine quadratische Function der a dividirt werden. Diese Function muss selbstverständlich eine symmetrische sein und darf sich nicht ändern, wenn irgend ein a sein Vorzeichen ändert, d. h. die betreffende Gleichung mit -1 multiplicirt wird. Die Function kann also nur $= c\,(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2)$ sein, wo c ein constanter Factor. Wenn wir also wieder das Ungenauigeitsmass mit M bezeichnen so ist jetzt:

$$M = \sqrt{\frac{\left|\begin{matrix} a_1 a_2 \\ l_1 \; l_2 \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} a_1 a_3 \\ l_1 \; l_3 \end{matrix}\right|^2 + \ldots\ldots\ldots}{\frac{1}{2}\, m(m-1)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2)\, c}}$$

Der Factor c bestimmt sich dadurch, dass, wenn man $a_1 = a_2 \ldots = a_m = 1$ setzt, der Werth von M mit demjenigen in Gleichung (5) übereinstimmen muss. Man erhält hierdurch $c = \frac{1}{m}$ und dann

$$M = \sqrt{\frac{\left|\begin{matrix} a_1 a_2 \\ l_1 \; l_2 \end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix} a_1 a_3 \\ l_1 \; l_3 \end{matrix}\right|^2 \ldots\ldots\ldots}{\frac{1}{2}\,(m-1)\,(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2)}}.$$

Die Summe der Quadrate der Combinationsdeterminanten ist aber, wenn man $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2 = [a^2]$, $a_1 l_1 + \ldots + a_m l_m = [a\,l]$ und $l_1^2 + \ldots + l_m^2 = [l^2]$ setzt, nach einem behannten Satze

$$= \left|\begin{matrix} [a^2] & [a\,l] \\ [a\,l] & [l^2] \end{matrix}\right|$$

und somit

$$M = \sqrt{\frac{1}{2\,(m-1)\,[a^2]} \left|\begin{matrix} [a^2] & [al] \\ [a\,l] & [l^2] \end{matrix}\right|} \quad \ldots (9)$$

§ 14. Löst man die Gleichungen (8) einzeln auf, so erhält man für x die Werthe

$$x = \frac{l_1}{a_1}, \; \frac{l_2}{a_2}, \; \ldots \; \frac{l_m}{a_m} \quad \ldots (10)$$

Man wird also für x einen Mittelwerth X aus diesen Quotienten nehmen, welchen man zweckmässig nach § 3 bildet, so dass

$$X = \frac{a_1 l_1 + a_2 l_2 \ldots + a_m l_m}{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2} = \frac{[a\,l]}{[a^2]} \ldots (11)$$

wird. Diese Mittelgrösse gewährt nach § 3 ebenso wie das arithmetische Mittel in § 11 den Vortheil, dass die übermässig grossen Fehler einzelner schlechten Messungen in demselben sich auf einen unschädlichen Betrag reduciren, während zugleich positive und negative Fehler sich theilweise vernichten. Letzteres erkennt man, wenn man beachtet, dass die Werthe von x in (10) wenigstens im Vorzeichen übereinstimmen, woraus folgt, dass auch die Producte $a_1 l_1$, $a_2 l_2$, . . . von gleichem Zeichen sind. Von der Zahl der Beobachtungen ist dieses gegenseitige Aufheben der Fehler auch unter der Voraussetzung dass, je grösser die Zahl der Beobachtungen, um so genauer die Summe der Beobachtungsfehler gleich Null sei, nicht in einer bestimmten und allgemeinen Weise abhängig. Denn wegen der Verschiedenheit der a ist die Summe der Fehler der Producte $a_1 l_1$, $a_2 l_2$, . . . nicht um so näher $= 0$, je näher die Summe der Fehler der $l = 0$ ist.

§ 15. Wenn die Messungen genau wären, so müssten die Werthe von x in den Gleichungen (10) einander gleich sein. Subtrahirt man also jeden der Brüche $\frac{l_1}{a_1}, \frac{l_2}{a_2} \ldots . \frac{l_m}{a_m}$ von jedem vorhergehenden und verwandelt jede dieser Differenzen in einen Bruch, dessen Nenner das Product der beiden Nenner ist, so würden die Zähler dieser Brüche $= 0$ sein müssen. Diese Zähler sind aber die Combinationsdeterminanten der Tafel

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & \ldots . & a_m \\ l_1 & l_2 & \ldots . & l_m \end{matrix}$$

Die nach § 4 gebildete Mittelgrösse dieser Combinationsdeterminanten würde also in naher Beziehung stehen zu der Ungenauigkeit, mit welcher der Werth von x durch die Beobachtungen bestimmt ist. Diese Mittelgrösse

$$= \left| \begin{matrix} [a^2] & [a\,l] \\ [a\,l] & [l^2] \end{matrix} \right|^{\frac{1}{2}}$$

ist aber schon als Mass für die Ungenauigkeit der Beobachtungen selbst erhalten worden. Eine solche einfache Beziehung zwischen beiden Ungenauigkeitsmassen war vorauszusehen, weil hier nur eine Grösse bestimmt wird. Vollständige Gleichheit findet jedoch nicht statt, denn als Ungenauigkeitsmass für x muss die Grösse durch eine andere Function als in § 13 dividirt werden. Wird nämlich x z. B. nur halb so gross genommen, die a also verdoppelt, so wird auch die Ungenauigkeit von x nur halb so gross. Da aber obiger Ausdruck in den a von der ersten Dimension ist, so hat man denselben also durch einen Ausdruck von der 2ten Demension zu dividiren. Der Radicand

muss also jetzt nicht durch $[a^2]$, sondern durch $[a^2]^2$ dividirt werden. Den ausserdem noch hinzuzufügenden constanten Factor bestimmen wir hier nicht und gehen überhaupt auf diesen Gegenstand hier nicht näher ein. Später sollen die betreffenden Formeln aus denjenigen des allgemeinen Falles der Ausgleichungsrechnung abgeleitet werden.

§ 16. Zu demselben Resultat wie in § 15 gelangt man auch auf folgende Weise. Bei vollkommen genauen Messungen müssten die Werthe von x in den Gleichungen (10) dem Mittelwerthe $\frac{[a\,l]}{[a^2]}$ in Gleichung (11) gleich sein. Die Differenzen

$$\begin{aligned}
\frac{[a\,l]}{[a^2]} - \frac{l_1}{a_1} &= \frac{[a\,l]\,a_1 - [a^2]\,l_1}{[a^2]\,a_1} \\
\frac{[a\,l]}{[a^2]} - \frac{l_2}{a_2} &= \frac{[a\,l]\,a_2 - [a^2]\,l_2}{[a^2]\,a_2} \\
\cdot \quad & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\frac{[a\,l]}{[a^2]} - \frac{l_m}{a_m} &= \frac{[a\,l]\,a_m - [a^2]\,l_m}{[a^2]\,a_m}
\end{aligned}$$

würden also $=0$ sein müssen; d. h. die Zähler der Brüche rechts müssten $=0$ sein. Die nach § 4 gebildete Mittelgrösse der absoluten Werthe dieser Grössen

$$\begin{aligned}
&\sqrt{([a\,l]a_1 - [a^2]l_1)^2 + ([a\,l]a_2 - [a^2]l_2)^2 + \ldots + ([a\,l]a_m - [a^2]l_m)^2} \\
&= \sqrt{[a\,l]^2\,[a^2] - 2[a\,l]\,[a^2]\,[a\,l] + [a^2]^2\,[l^2]} \\
&= \sqrt{[a^2]^2\,[l^2] - [a\,l]^2\,[a^2]} = \sqrt{[a^2]([a^2]\,[l^2] - [a\,l]^2)} \\
&= \sqrt{[a^2]\begin{vmatrix} [a^2] & [a\,l] \\ [a\,l] & [l^2] \end{vmatrix}}
\end{aligned}$$

steht also in naher Beziehung zu der Ungenauigkeit des Werthes X. Der Radicand würde hier noch durch $[a^2]^3$ dividirt werden müssen.

§ 17. Wenn die Messungen und somit auch der Mittelwerth X genau wären, so müssten die Differenzen $a_1 X - l_1$, $a_2 X - l_2$, . . . $a_m X - l_m$ sämmtlich $=0$ sein. Die nach § 4 gebildetete Mittelgrösse dieser Differenzen

$$\sqrt{\frac{(a_1 X - l_1)^2 + (a_2 X - l_2)^2 + \ldots + (a_m X - l_m)^2}{m}}$$

wird also ebenfalls geeignet sein zur Beurtheilung der Genauigkeit der Messungen. Dass dieselbe mit dem in § 13 erhaltenen Ungenauigkeitsmass im Wesentlichen übereinstimmt, wird sich bei der jetzt folgenden allgemeinen Behandlung des Ausgleichungsproblems ergeben. Zugleich werden sich dann die Änderungen ergeben, welche die für specielle Fälle erhaltenen Formeln hinsichtlich der constanten Factoren bedürfen, um sie mit den allgemeinen Resultaten in

Übereinstimmung zu bringen. Die Behandlung dieser speciellen Fälle hatte wesentlich nur den Zweck, zu zeigen, wie die Anwendung des Princips der Ausgleichungsrechnung nach Mittelgrössen in den einfacheren Fällen sich gestaltet und durch brauchbare Resultate sich bewährt.

VI. Bestimmung mehrerer Grössen.

§ 18. In der Zahlentafel

$$\begin{array}{l} \alpha_0^{1)}\ \alpha_1^{1)}\ \alpha_2^{1)}\ \ldots\ \alpha_n^{1)} \\ \alpha_0^{2)}\ \alpha_1^{2)}\ \alpha_2^{2)}\ \ldots\ \alpha_n^{2)} \\ \quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ \quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ \alpha_0^{m)}\ \alpha_1^{m)}\ \alpha_2^{m)}\ \ldots\ \alpha_n^{m)}, \end{array} \quad \ldots (12)$$

in welcher m grösser als n sei, mögen die Grössen α willkürlich angenommen werden. Ferner werden n Grössen $x_1, x_2 \ldots x_n$ ebenfalls willkürlich und eine Grösse $x_0 = 1$ angenommen und die α aus den Gleichungen

$$\begin{array}{l} \alpha_0^{1)} x_0 + \alpha_1^{1)} x_1 + \alpha_2^{1)} x_2 + \ldots + \alpha_n^{1)} x_n = 0 \\ \alpha_0^{2)} x_0 + \alpha_1^{2)} x_1 + \alpha_2^{2)} x_2 + \ldots + \alpha_n^{2)} x_n = 0 \\ \quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ \quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ \alpha_0^{m)} x_0 + \alpha_1^{m)} x_1 + \alpha_2^{m)} x_2 + \ldots + \alpha_n^{m)} x_n = 0 \end{array} \quad \ldots (13)$$

berechnet. Die gefundenen Werthe trägt man auf Metallstäben ab und bestimmt sie wieder durch Messung. Die so erhaltenen Werthe werden von den ursprünglichen etwas abweichen. Nennen wir dieselben $\alpha_0^{1)}, \alpha_0^{2)} \ldots \alpha_0^{m)}$ so haben wir jetzt die von (12) blos in der ersten Colonne abweichende Zahlentafel

$$\begin{array}{l} \alpha_0^{1)}\ \alpha_1^{1)}\ \alpha_2^{1)}\ \ldots\ \alpha_n^{1)} \\ \alpha_0^{2}\ \alpha_1^{2}\ \alpha_2^{2}\ \ldots\ \alpha_n^{2} \\ \quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ \quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ \alpha_0^{m)}\ \alpha_1^{m)}\ \alpha_2^{m)}\ \ldots\ \alpha_n^{m)} \end{array} \quad \ldots (14)$$

und wenn wir jetzt setzen

$$\begin{array}{l} \alpha_0^{1)} x_0 + \alpha_1^{1)} x_1 + \alpha_2^{1)} x_2 + \ldots + \alpha_n^{1)} x_n = f_1 \\ \alpha_0^{2)} x_0 + \alpha_1^{2)} x_1 + \alpha_2^{2)} x_2 + \ldots + \alpha_n^{2)} x_n = f_2 \\ \quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ \quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ \alpha_0^{m)} x_0 + \alpha_1^{m)} x_1 + \alpha_2^{m)} x_2 + \ldots + \alpha_n^{m)} x_n = f_m \end{array} \quad \ldots (15)$$

so werden $f_1, f_2, \ldots f_m$ etwas von 0 verschieden sein.

Aus den Gleichungen (13) folgt, dass sämmtliche Combinationsdeterminanten der Zahlentafel (12) gleich 0 sind. Wenn also die Messungen genau wären,

somit die a_0 mit den α_0 übereinstimmten, so würden auch die Combinationsdeterminanten der Tafel (14) gleich 0 sein. Bei ungenauen Messungen stellt also der Werth einer solchen Determinante zugleich ihren Fehler dar. Derselbe wird um so näher gleich 0 sein, je genauer die in der Determinante vorkommenden Messungsresultate sind. Bilden wir demnach aus sämmtlichen Combinationsdeterminanten der Tafel (14) die Mittelgrösse der Absolutwerthe nach § 4, also wenn die Summe der Quadrate dieser Determinanten mit $\Sigma(0\,1\,2\,3\,\ldots\,n)^2$ bezeichnet wird, die Mittelgrösse

$$\sqrt{\Sigma(0\,1\,2\,\ldots\,n)^2}, \quad \ldots \quad (16)$$

so wird diese zu der Ungenauigkeit der Messungen in einer nahen Beziehung stehn. Damit diese Beziehung noch etwas deutlicher und bestimmter in die Augen falle, bilden wir die Differenz von je zwei entsprechenden Combinationsdeterminanten der Tafeln (14) und (12). Eine dieser Differenzen ist

$$\begin{vmatrix} a_0^{1)} & a_1^{1)} & \ldots & a_n^{1)} \\ a_1^{2)} & a_2^{2)} & \ldots & a_n^{2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0^{n)} & a_1^{n)} & \ldots & \alpha_n^{n)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_0^{1)} & a_1^{1)} & \ldots & a_n^{1)} \\ \alpha_0^{2)} & a_1^{2)} & \ldots & a_n^{2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_0^{n)} & a_1^{n)} & \ldots & a_n^{n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0^{1)} - \alpha_0^{1)} & a_1^{1)} a_2^{1)} & \ldots & a_n^{1)} \\ a_0^{1)} - \alpha_0^{2)} & a_1^{2)} a_2^{2)} & \ldots & a_n^{2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0^{n)} - \alpha_0^{n)} & a_1^{n)} a_2^{n)} & \ldots & a_n^{n)} \end{vmatrix}$$

Da links der Subtrahend $= 0$ ist, so ist

$$\begin{vmatrix} a_0^{1)} & a_1^{1)} & \ldots & a_n^{1)} \\ a_0^{2)} & a_1^{2)} & \ldots & a_n^{2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0^{n)} & a_1^{n)} & \ldots & a_n^{n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0^{1)} - \alpha_0^{1)} & a_1^{1)} a_2^{1)} & \ldots & a_n^{1)} \\ a_0^{2)} - \alpha_0^{2)} & a_1^{2)} a_2^{2)} & \ldots & a_n^{2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0^{n)} - \alpha_0^{n)} & a_1^{n)} a_2^{n)} & \ldots & a_n^{n)} \end{vmatrix}$$

Man kann also zur Bildung der Mittelgrösse auch die Combinationsdeterminanten der Tafel

$$\begin{vmatrix} a_0^{1)} - \alpha_0^{1)} & a_1^{1)} a_2^{1)} & \ldots & a_n^{1)} \\ a_0^{2)} - \alpha_0^{2)} & a_1^{2)} a_2^{2)} & \ldots & a_n^{2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0^{m)} - \alpha_0^{m)} & a_1^{m)} a_2^{m)} & \ldots & a_n^{m)} \end{vmatrix}$$

nehmen, in welcher die erste Colonne die Messungsfehler enthält. Die Summe der Quadrate dieser Determinanten ist eine quadratische Function der Mesungsfehler, die Wurzel aus derselben eine Function erster Dimension derselben. Lässt man die Messungsfehler sämmtlich in einem bestimmten Verhältnisse wachsen, so wächst auch der Wurzelausdruck in dem nämlichen Verhältnisse. Ändert sich nur ein Theil der Messungsfehler, so wird sich ein entsprechender Theil des Radicanden der Wurzel ändern. So lange also blos die beobachteten Grössen sich ändern, wird der Werth des Wurzelausdruckes (16) zur Vergleichung der Genauigkeit der Messungen geeignet sein. Um aber als allgemeines Mass der Ungenauigkeit dienen zu können, muss der Radicand noch durch einen

die gemessenen Grössen nicht enthaltenden Ausdruck dividirt werden. Um diesen Ausdruck so wie auch den noch hinzuzufügenden constanten Factor zu bestimmen, gehen wir von der Annahme aus, dass der Ausdruck (16), der zu den Ungenauigkeiten in einer gewissen Proportionalität steht, für bestimmte einfache Fälle dem auf andere Weise bestimmten wahren Ungenauigkeitsmass genau gleich werden müsse. In der Zahlentafel (14) möge $m = n+1$ und $a_1^{n+1} = a_2^{n+1} \ldots = a_n^{n+1} = 0$ sein. Es existirt dann nur eine der Combinationsdeterminanten, deren Quadrat

$$= \begin{vmatrix} a_0^{1)} a_1^{1)} a_2^{1)} \ldots a_n^{1)} \\ a_0^{2)} a_1^{2)} a_2^{2)} \ldots a_n^{2)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\ a_0^{n)} a_1^{n)} a_2^{n)} \ldots a_n^{n)} \\ a_0^{n+1)} 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \end{vmatrix}^2 = a_0^{n+1)2} \begin{vmatrix} a_1^{1)} a_2^{1)} \ldots a_n^{1)} \\ a_1^{2)} a_2^{2)} \ldots a_n^{2)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\ a_1^{n)} a_2^{n)} \ldots a_n^{n)} \end{vmatrix}^2$$

ist. Es ist also jetzt obiger Wurzelausdruck (16)

$$= a_0^{n+1)} \begin{vmatrix} a_1^{1)} a_2^{1)} \ldots a_n^{1)} \\ a_1 2) a_2 2) \ldots a_n^{2)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\ a_1^{n)} a_2^{n)} \ldots a_n^{n)} \end{vmatrix}.$$

In diesem Ausdruck kommt von den gemessenen Grössen nur $a_0^{n+1)}$ vor. Derselbe kann sich also auch nur auf die Ungenauigkeit dieser Grösse beziehen. In der That hängt das gleichzeitige Stattfinden der ersten $n+1$ Gleichungen (15) von $a_0^{1)}$, $a_0^{2)}$, . . . $a_0^{n)}$ nicht ab. Die Ungenauigkeit von $a_0^{n+1)}$ ist aber $= a_0^{n+1)}$, da $a_0^{n+1)} = 0$ sein sollte. Damit also der Ausdruck (16) in diesem Falle das Ungenauigkeitsmass darstelle, muss derselbe durch

$$\begin{vmatrix} a_1^{1)} \ldots a_n^{1)} \\ \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\ \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\ a_1^{n)} \ldots a_n^{n)} \end{vmatrix},$$

mithin der Radicand durch das Quadrat hiervon dividirt werden. Entsprechendes gilt aber, wenn man irgend welche andere $(n+1)$ aus den m Gleichungen zusammennimmt und es folgt also, dass der Radicand des Wurzelausdruckes (16) dividirt werden muss durch die Summe der Quadrate der Combinationsdeterminanten der n letzten Colonnen. Als Mass der Ungenauigkeit hat man also jetzt die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Combinationsdeterminanten der $n+1$ Colonnen dividirt durch die Wurzel aus der Summe der Quadrate der Combinationsdeterminanten der n letzten Colonnen, mithin, wenn auch letztere Summe auf obige Art bezeichnet wird, den Ausdruck

$$\sqrt{\frac{\Sigma(0\,1\,2 \ldots n)^2}{\Sigma(1\,2 \ldots n)^2}} \quad \ldots \quad (17)$$

Um ferner den constanten Factor zu finden, durch welchen ausserdem noch dividirt werden muss, so mögen in der Zahlentafel (14) alle Zahlen der $n+1^{\text{ten}}$ bis m^{ten} Zeile mit Ausnahme derjenigen der 0ten Colonne $=0$ sein. Die Summe der Quadrate der Combinationsdeterminanten der $n+1$ Colonnen ist dann

$$=(a_0^{n+1)2}+a_0^{n+1)2}+\ldots+a_0^{m)2})\begin{vmatrix} a_1^{1)} & \ldots & a_n^{1)} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_1^{n)} & \ldots & a_n^{n)} \end{vmatrix}^2,$$

diejenige der Combinationsdeterminanter der n letzten Colonnen

$$=\begin{vmatrix} a_1^{1)} & \ldots & a_n^{1)} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_1^{n)} & \ldots & a_n^{n)} \end{vmatrix}^2$$

Der Ausdruck (17) wird demnach

$$=\sqrt{a_0^{n+1)2}+a_0^{n+2)2}+\ldots+a_0^{m)2}}$$

Damit obiger Ausdruck hiermit übereinstimme, muss derselbe noch durch $\sqrt{m-n}$ dividirt werden. Somit ist der mit dem Ausdruck (17) noch zu verbindende Divisor $=\sqrt{m-n}$ und demnach der vollständige Ausdruck für das gesuchte Ungenauigkeitsmass

$$=\sqrt{\frac{\Sigma(0\,1\,2\ldots n)^2}{(m-n)\,\Sigma(1\,2\ldots n)^2}}$$

Wenn wir nun

$$a_i^{1)}a_j^{1)}+a_i^{2)}a_j^{2)}+\ldots+a_i^{m)}a_j^{m)}=a_{ij}$$

setzen, so ist nach bekannten Sätzen die Summe der Quadrate der Combinationsdeterminanten der Tafel (14)

$$\Sigma(0\,1\,2\ldots n)^2=\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \ldots & a_{1n} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \ldots (18)$$

Diese symmetrische Determinante möge die Normaldeterminante der Ausgleichung genannt und mit A, die Unterdeterminanten derselben mit A_{ij} bezeichnet werden, so dass also A_{ij} der Coefficient von a_{ij} in der Determinante A ist. Die Summe der Quadrate der Combinationsdeterminanten der letzten n Colonnen ist

$$\Sigma(1\,2\ldots n)^2=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

also = der Unterdeterminante A_{00}. Bezeichnen wir also das Ungenauigkeitsmass oder den mittleren Fehler einer Messung mit M, so ist

$$M = \sqrt{\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n0} & a_{n0} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} : (m-n) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \sqrt{\frac{A}{(m-n)A_{00}}} \quad \ldots (19)$$

§ 19. Aus den ersten n von den Gleichungen (15) in § 18 allein würde man, da $x_0 = 1$ ist, erhalten:

$$x_1 = - \begin{vmatrix} a_0^{1)} & a_2^{1)} & a_3^{1)} & \cdots & a_n^{1)} \\ a_0^{2)} & a_2^{2)} & a_3^{2)} & \cdots & a_n^{2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_0^{n)} & a_2^{n)} & a_3^{n)} & \cdots & a_n^{n)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1^{1)} & a_2^{1)} & \cdots & a_n^{1)} \\ a_1^{2)} & a_2^{2)} & \cdots & a_n^{2)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_1^{n)} & a_2^{n)} & \cdots & a_n^{n)} \end{vmatrix}$$

$$x_2 = + \begin{vmatrix} a_0^{1)} & a_1^{1)} & a_3^{1)} & \cdots & a_n^{1)} \\ a_0^{2)} & a_1^{2)} & a_3^{2)} & \cdots & a_n^{2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_0^{n)} & a_1^{n)} & a_3^{n)} & \cdots & a_n^{n)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1^{1)} & a_2^{1)} & \cdots & a_n^{1)} \\ a_1^{2)} & a_2^{2)} & \cdots & a_n^{2)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_1^{n)} & a_2^{n)} & \cdots & a_n^{n)} \end{vmatrix}$$

$$x_3 = - \begin{vmatrix} a_0^{1)} & a_1^{1)} & a_2^{1)} & a_4^{1)} & \cdots & a_n^{1)} \\ a_0^{2)} & a_1^{2)} & a_2^{2)} & a_4^{2)} & \cdots & a_n^{2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_0^{n)} & a_1^{n)} & a_2^{n)} & a_4^{n)} & \cdots & a_n^{n)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1^{1)} & a_2^{1)} & \cdots & a_n^{1)} \\ a_1^{2)} & a_2^{2)} & \cdots & a_n^{2)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_1^{n)} & a_2^{n)} & \cdots & a_n^{n)} \end{vmatrix}$$

u. s. w.

Irgend eine der Unbekannten, x_ν, erhält den Werth:

$$x_\nu = (-1)^\nu \begin{vmatrix} a_0^{1)} & a_1^{1)} & \cdots & a_{\nu-1}^{1)} & a_{\nu+1}^{1)} & a_{\nu+2}^{1)} & \cdots & a_n^{1)} \\ a_0^{2)} & a_1^{2)} & \cdots & a_{\nu-1}^{2)} & a_{\nu+1}^{2)} & a_{\nu+2}^{2)} & \cdots & a_n^{2)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_0^{n)} & a_1^{n)} & \cdots & a_{\nu-1}^{n)} & a_{\nu+1}^{n)} & a_{\nu+2}^{n)} & \cdots & a_n^{n)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1^{1)} & a_2^{1)} & \cdots & a_n^{1)} \\ a_1^{2)} & a_2^{2)} & \cdots & a_n^{2)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_1^{n)} & a_2^{n)} & \cdots & a_n^{n)} \end{vmatrix}$$

Bestimmt man auf gleiche Weise den Werth dieser Unbekannten aus je n von den m Gleichungen (15), so kann man aus diesen verschiedenen Werthen von x_ν nach § 3 einen Mittelwerth

$$X_\nu = (-1)^\nu \frac{Z}{N}$$

erhalten, dessen Zähler Z die Summe der paarweise multiplicirten Combinationsdeterminanten der Tafeln

$$\begin{matrix} a_0^{1)} a_1^{1)} a_2^{1)} \ldots a_{\nu-1}^{1)} a_{\nu+1}^{1)} \ldots a_n^{1)} \\ a_0^{2)} a_1^{2)} a_2^{2)} \ldots a_{\nu-1}^{2)} a_{\nu+1}^{2)} \ldots a_n^{2)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_0^{m)} a_1^{m)} a_2^{m)} \ldots a_{\nu-1}^{m)} a_{\nu+1}^{m)} \ldots a_n^{m)} \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} a_1^{1)} a_2^{1)} \ldots a_n^{1)} \\ a_1^{2)} a_2^{2)} \ldots a_n^{2)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_1^{m)} a_2^{m)} \ldots a_n^{m)} \end{matrix}$$

ist, während der Nenner die Summe der Quadrate der Combinationsdeterminanten der zweiten dieser Tafeln ist. Wenn also die a_{ij} dieselbe Bedeutung haben wie in der Determinante (18), so ist

$$X_\nu = (-1)^\nu \begin{vmatrix} a_{01} & a_{02} & a_{03} & \ldots & a_{0n} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{\nu-1,1} & a_{\nu-1,n} & a_{\nu+1,3} & \ldots & a_{\nu-1,n} \\ a_{\nu+1,1} & a_{\nu+1,2} & a_{\nu+1,3} & \ldots & a_{\nu+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{A_{\nu 0}}{A_{00}} = \frac{A_{0\nu}}{A_{00}} \ldots (20)$$

Von den Quotienten, aus welchen hier ein Mittel genommen ist, enthält jeder eine Anzahl gemessene Grössen gleich der Zahl der Unbekannten. Wenn also einzelne Beobachtungen mit grösseren Fehlern behaftet sind, so werden diese sich auch denjenigen Quotienten mittheilen, worin jene Beobachtungen vorkommen, es sei denn, dass sie sich bei dem einen oder anderen gegenseitig ganz oder theilweise aufheben. Da aber bei einer grösseren Zahl von Beobachtungen die Zahl der übermässig fehlerhaften verhältnissmässig nur gering ist, so wird letzteres auch der Fall sein mit denjenigen Einzelwerthen von x_ν, welche hierdurch ebenfalls in höherem Grade ungenau werden. In den Mittelwerth wird also nur ein geringer Bruchtheil jener grösseren Fehler eingehen. Ebenso findet auch das gegenseitige theilweise Aufheben der Fehler hier Statt. Jedoch ist dieser Umstand hier von noch geringerer Bedeutung als in den früheren einfacheren Fällen. Die gemessenen Grössen werden zu je n combinirt und jede dieser Combinationen mit den zugehörigen Coefficienten der Unbekannten zu einer Determinante verbunden. Diese Determinanten vertreten dann die Stelle der l in Gl. (11). Von denselben lässt sich nun in obiger Beziehung kaum mehr behaupten, als dass ihre absoluten Werthe weder sämmtlich zu gross noch sämmtlich zu klein sein werden. Der Hauptgrund für die Ausgleichung nach Mittelgrössen bleibt also die Vermeidung der Nachtheile einer willkürlichen Auswahl von Beobachtungen. Derselbe behält auch dann seine Geltung, wenn einseitig wirkende Fehlerursachen vorkommen. Auch in diesem Falle wird die Genauigkeit der Resultate der mittleren Genauigkeit der besseren Beobachtungen entsprechen und somit durch die Ausgleichung

das erreicht werden, was ohne nähere Kenntnis jener einseitig wirkenden Fehlerursachen erreicht werden kann.

Nach Gl. (20) sind nun die Werthe der Unbekannten

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A_{01}}{A_{00}} \\ x_2 &= \frac{A_{02}}{A_{00}} \\ x_3 &= \frac{A_{03}}{A_{00}} \quad \ldots \quad (21) \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \\ x_n &= \frac{A_{0n}}{A_{00}} \end{aligned}$$

§ 20. In § 19 mögen

$$\begin{aligned} x_\nu{}^{1)} &= (-1)^\nu \frac{D_\nu{}^{1)}}{D_0{}^{1)}} \\ x_\nu{}^{2)} &= (-1)^\nu \frac{D_\nu{}^{2)}}{D_0{}^{2)}} \quad \ldots \quad (22) \end{aligned}$$

u. s. w.

die verschiedenen Werthe von x_ν sein, welche man erhält, wenn man die m Gleichungen (15) zu je n combinirt. Die Zähler sind hier die Combinationsdeterminanten der von der Colonne mit a_ν, die Nenner die Combinationsdeterminanten der von der Colonne mit a_0 befreiten Tafel (14). Man subtrahire jeden dieser Werthe von x_ν von jedem vorhergehenden und verwandle jede dieser Differenzen in einen Bruch, dessen Nenner das Product der beiden Nenner ist. Die Zähler sind dann sämmtliche Combinationsdeterminanten der Tafel

$$\begin{aligned} &D_\nu \; D_\nu{}^{2)} D_\nu{}^{3)} \ldots \\ &D_0{}^{1)} D_0{}^{2)} D_0{}^{3)} \ldots \end{aligned}$$

Wären alle Werthe von x_ν einander gleich, was bei vollkommener Genauigkeit der Messungen stattfinden würde, so müssten diese Determinanten sämmtlich $= 0$ sein. Man kann demnach die nach § 4 gebildete Mittelgrösse der absoluten Werthe dieser Determinanten als einen Fehler betrachten, der sich auf x_ν allein bezieht, der also beurtheilen lässt, mit welcher Genauigkeit die Unbekannte x_ν mittelst der Gleichungen (15) aus den gemessenen Grössen bestimmt werden kann. Die Summe der Quadrate dieser Determinanten ist aber gleich der Determinante

$$\begin{vmatrix} D_0{}^{1)}D_0{}^{1)} + D_0{}^{2)}D_0{}^{2)} + D_0{}^{3)}D_0{}^{3)} + \ldots & D_0{}^{1)}D_\nu{}^{1)} + D_0{}^{2)}D_\nu{}^{2)} + D_0{}^{3)}D_\nu{}^{3)} + \ldots \\ D_0{}^{1)}D_\nu{}^{1)} + D_0{}^{2)}D_\nu{}^{2)} + D_0{}^{3)}D_\nu{}^{3)} + \ldots & D_\nu{}^{1)}D_\nu{}^{1)} + D_\nu{}^{2)}D_\nu{}^{2)} + D_\nu{}^{3)}D_\nu{}^{3)} + \ldots \end{vmatrix} = Q \quad \ldots \quad (23)$$

Nun ist aber, wenn a_{ij} wieder dieselbe Bedeutung hat, wie früher:

$$D_0^{1)}D_0^{1)}+D_0^{2)}D_0^{2)}+D_0^{3)}D_0^{3)}+\ldots=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = R = A_{00} \ldots \quad (24)$$

$$D_0^{1)}D_\nu^{1)}+D_0^{2)}D_\nu^{2)}+D_0^{3)}D_\nu^{3)}=\begin{vmatrix} a_{01} & a_{02} & a_{03} & \ldots & a_{0n} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\nu-1,1} & a_{\nu-1,2} & a_{\nu-1,3} & \ldots & a_{\nu-1,n} \\ a_{\nu+1,1} & a_{\nu+1,2} & a_{\nu+1,3} & \ldots & a_{\nu+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = S = (-1)^\nu A_{\nu 0} \quad \ldots \quad (25)$$

$$D_\nu^{1)}D_\nu^{1)}+D_\nu^{2)}D_\nu^{2)}+D_\nu^{3)}D_\nu^{3)}+\ldots=$$

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0,\nu-1} & a_{0,\nu+1} & a_{0,\nu+2} & \ldots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1,\nu-1} & a_{1,\nu+1} & a_{1,\nu+2} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\nu-1,0} & a_{\nu-1,1} & \ldots & a_{\nu-1,\nu-1} & a_{\nu-1,\nu+1} & a_{\nu-1,\nu+2} & \ldots & a_{\nu-1,n} \\ a_{\nu+1,0} & a_{\nu+1,1} & \ldots & a_{\nu+1,\nu-1} & a_{\nu+1,\nu+1} & a_{\nu+1,\nu+2} & \ldots & a_{\nu+1,n} \\ a_{\nu+2,0} & a_{\nu+2,1} & \ldots & a_{\nu+2,\nu-1} & a_{\nu+2,\nu+1} & a_{\nu+2,\nu+2} & \ldots & a_{\nu+2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & a_{n,\nu-1} & a_{n,\nu+1} & a_{n,\nu+2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = T = A_{\nu\nu} \ldots \quad (26)$$

Schreiben wir nun die Normaldeterminante (18) in dieser Weise

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0,\nu-1} & a_{0,\nu+1} & a_{0,\nu+2} & \ldots & a_{0n} & a_{0\nu} \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1,\nu-1} & a_{1,\nu+1} & a_{1,\nu+2} & \ldots & a_{1n} & a_{1\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\nu-1,0} & a_{\nu-1,1} & \ldots & a_{\nu-1,\nu-1} & a_{\nu-1,\nu+1} & a_{\nu-1,\nu+2} & \ldots & a_{\nu-1,n} & a_{\nu-1,\nu} \\ a_{\nu+1,0} & a_{\nu+1,1} & \ldots & a_{\nu+1,\nu-1} & a_{\nu+1,\nu+1} & a_{\nu+1,\nu+2} & \ldots & a_{\nu+1,n} & a_{\nu+1,\nu} \\ a_{\nu+2,0} & a_{\nu+2,1} & \ldots & a_{\nu+2,\nu-1} & a_{\nu+2,\nu+1} & a_{\nu+2,\nu+2} & \ldots & a_{\nu+2,n} & a_{\nu+2,\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & a_{n,\nu-1} & a_{n,\nu+1} & a_{n,\nu+2} & \ldots & a_{nn} & a_{n\nu} \\ a_{\nu 0} & a_{\nu 1} & \ldots & a_{\nu,\nu-1} & a_{\nu,\nu+1} & a_{\nu,\nu+2} & \ldots & a_{\nu n} & a_{\nu\nu} \end{vmatrix} \quad \ldots \quad (27)$$

so dass also die ursprüngliche Zeile mit $a_{\nu 0}\ a_{\nu 1}\ldots$ und die Colonne mit $a_{0\nu}\ a_{1\nu}\ldots$ zur letzten wird, so entsteht aus dieser

1) indem man die erste Zeile und die erste Colonne fort lässt eine Determinante, welche gleich R (24) ist; denn R verwandelt sich in

dieselbe, wenn man darin ebenfalls die Zeile und die Colonne vom Index ν zur letzten macht, wodurch R selbst seinen Werth nicht ändert.

2) indem man die erste Colonne und die letzte Zeile weglässt, eine Determinante die gleich ist $\pm S$ (25); denn S verwandelt sich in dieselbe, wenn man darin die Colonne mit $a_{0\nu}\, a_{1\nu} \ldots$ zur letzten macht, wodurch S entweder unverändert bleibt oder nur sein Zeichen ändert.

3) die Determinante T (26) indem man die letzte Zeile und die letzte Colonne weglässt.

Wenn man ferner den ganzen Umfang fortlässt, so bleibt eine Determinante übrig, welche die in der Determinante

$$A_{00} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \quad \ldots (28)$$

mit $a_{\nu\nu}$ multiplicirte Unterdeterminante ist. Wenn wir also die Unterdeterminanten von (28) mit $\mathfrak{A}_{ij}$ bezeichnen, so ist $\mathfrak{A}_{\nu\nu}$ jene Unterdeterminante. Nach den Gleichungen (23), (24), (25) und (26) ist jetzt

$$Q = RT - S^2$$

und dies nach § 8

$$= A \cdot \mathfrak{A}_{\nu\nu}$$

weil die Determinante (27) $= A$ ist. Demnach ist (23)

$$\sqrt{Q} = \sqrt{A \cdot \mathfrak{A}_{\nu\nu}} \quad \ldots (29)$$

die Grösse, nach welcher die Ungenauigkeit von x_ν beurtheilt werden kann. Damit dieselbe förmlich als allgemeines Mass dieser Ungenauigkeit betrachtet werden könne, muss sie noch mit einem von den Beobachtungsresultaten unabhängigen Ausdruck multiplicirt werden, zu dessen Bestimmung wir Obiges unter besonderen Voraussetzungen auf die Ermittelung der Ungenauigkeit von x_1 anwenden wollen.

Die x mögen willkürlich angenommen werden und die a in den ersten n Gleichungen (13) so, dass die n Combinationsdeterminanten der Tafel

$$\begin{vmatrix} a_2^{1)} a_3^{1)} \ldots a_n^{1)} \\ a_2^{2)} a_3^{2)} \ldots a_n^{2)} \\ \ldots \\ \ldots \\ a_2^{n)} a_3^{n)} \ldots a_n^{n)} \end{vmatrix} \quad \ldots (30)$$

dem absoluten Werthe nach einander gleich, $= C$ sind. Dann werden $\alpha_0^{1)}, \alpha_0^{2)}, \ldots \alpha_0^{n)}$ aus den ersten n Gleichungen bestimmt. Setzen wir jetzt:

$$\begin{vmatrix} a_1^{1)} a_2^{1)} a_3^{1)} \ldots a_n^{1)} \\ a_1^{2)} a_2^{2)} a_3^{2)} \ldots a_n^{2)} \\ \ldots \\ a_1^{n)} a_2^{n)} a_3^{n)} \ldots a_n^{n)} \end{vmatrix} = D, \quad \begin{vmatrix} \alpha_0^{1)} a_2^{1)} a_3^{1)} \ldots a_n^{1)} \\ \alpha_0^{2)} a_2^{2)} a_3^{2)} \ldots a_n^{2)} \\ \ldots \\ \alpha_0^{n)} a_2^{n)} a_3^{n)} \ldots a_n^{n)} \end{vmatrix} = D',$$

so folgt aus den ersten n Gleichungen

$$x_1 = -\frac{D'}{D} \quad \ldots \quad (31)$$

Ferner wird nun

$$a_1^{n+1)} = a_1^{n+2)} \ldots = a_1^{m)} = \frac{D}{C} \quad \ldots \quad (32)$$

$$\alpha_0^{n+1)} = \alpha_0^{n+2)} \ldots = \alpha_0^{m)} = \frac{D'}{C} \quad \ldots \quad (33)$$

und sämmtliche übrige $a = 0$ gesetzt, wo dann aus jeder der letzten $(m-n)$ Gleichungen sich ebenfalls

$$x_1 = -\frac{D'}{D}$$

ergibt. Dieser Werth von x_1 genügt also jetzt sämmtlichen Gleichungen.

Die Grössen $\alpha_0^{1)}, \alpha_0^{2)} \ldots \alpha_0^{n)}$ bleiben jetzt unverändert; $\alpha_0^{n+1)}, \alpha^{n+2)} \ldots \alpha_0^{m)}$ aber werden durch Auftragen und Messung ungenau bestimmt, jedoch nicht jede für sich, sondern der gemeinsame Werth derselben für alle zugleich. In den Gleichungen (15) stimmen also $a_0^{1)}, a_0^{2)} \ldots a_0^{m)}$ mit $\alpha_0^{1)}, \alpha_0^{2)} \ldots \alpha_0^{m)}$ in (13) überein; $a_0^{n+1)}, a_0^{n+2)} \ldots a_0^{m)}$ aber sind von $\alpha_0^{n+1)}, \alpha_0^{n+2)} \ldots \alpha_0^{m)}$ verschieden, unter sich jedoch gleich. Setzen wir also

$$a_0^{n+1)} = a_0^{n+2)} \ldots = a_0^{m)} = \frac{A'}{C}, \quad \ldots \quad (34)$$

so ist A' von D' verschieden. Von den neuen Werthen von x_1 stimmt also einer mit dem früheren überein, weil die ersten n Gleichungen unverändert geblieben sind; er ist

$$x_1 = -\frac{D'}{D}.$$

Um die übrigen Werthe ebenfalls in der Form zu erhalten, in welcher man sie zur Bestimmung des Mittelwerthes sowie der Ungenauigkeit braucht, hat man jede der n ersten Gleichungen mit jeder der übrigen zu vertauschen und aus jeder dieser Combinationen den Werth von x_1 ohne Kürzung von Zähler und Nenner gegeneinander zu bestimmen. Sämmtliche übrige Combinationen ergeben nämlich $x = 0:0$ und tragen also weder zu dem Mittelwerthe noch zu dem Ungenauigkeitsmass etwas bei.

Vertauschen wir nun in dieser Weise z. B. die erste Gleichung mit der $+1)^{\text{ten}}$, so haben wir

$$\begin{array}{l} a_0^{n+1)}\, x_0 + a_1^{n+1)}\, x_1 + 0 \quad + \ldots + 0 \quad = 0 \\ a_0^{2)} \quad x_0 + a_1^{2)} \quad x_1 + a_2^{2)} x_2 + \ldots + a_n^{2)} x_n = 0 \\ a_0^{3)} \quad x_0 + a_1^{3)} \quad x_1 + a_2^{3)} x_2 + \ldots + a_n^{3)} x_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_0^{n)} \quad x_0 + a_1^{n)} \quad x_1 + a_2^{n)} x_2 + \ldots + a_n^{n)} x_n = 0 \end{array} .$$

Hieraus erhält man

$$x_1 = - \begin{vmatrix} a_0^{n+1)} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_0^{2)} & a_2^{2)} & a_3^{2)} & \ldots & a_n^{2)} \\ a_0^{3)} & a_2^{3)} & a_3^{3)} & \ldots & a_n^{3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0^{n)} & a_2^{n)} & a_3^{n)} & \ldots & a_n^{n)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1^{n+1)} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1^{2)} & a_2^{2)} & a_3^{2)} & \ldots & a_n^{2)} \\ a_1^{3)} & a_2^{3)} & a_3^{3)} & \ldots & a_n^{3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{n)} & a_2^{n)} & a_3^{n)} & \ldots & a_n^{n)} \end{vmatrix}$$

$$= - \frac{a_0^{n+1)}\, C}{a_1^{n+1)}\, C}$$

oder nach Gleich. (32) und (34)

$$x_1 = - \frac{\Delta'}{D} .$$

Denselben Werth von x_1 erhält man, wenn man die erste Gleichung (15) mit irgend einer andern von den $m-n$ übrigen vertauscht, weil letztere sich nicht unterscheiden. Der nämliche Werth von x_1 wird aber auch dann erhalten, wenn man irgend eine der übrigen von den ersten n Gleichungen vertauscht, weil alle Combinationsdeterminanten der Tafel (30) $= C$ sind.

Für x_1 haben wir also jetzt

$$1 \text{ mal den Werth } - \frac{D'}{D}$$

$$(m-n)\, n \text{ » » » } - \frac{\Delta'}{D}$$

Der Wurzelausdruck (29), unmittelbar aus den Werthen von x_1 bestimmt wird also jetzt

$$\sqrt{(m-n)\, n\, (D\, D' - D\, \Delta')^2} = \pm D\, (D' - \Delta') \sqrt{(m-n)\, n} \quad \ldots \quad (35)$$

Der Mittelwerth von x_1 aber ist

$$- \frac{D\, D' + (m-n)\, n\, D\, \Delta'}{D^2 + (m-n)\, n\, D^2} = - \frac{D' + (m-n)\, n\, \Delta'}{D + (m-n)\, n\, D} = - \frac{D' + (m-n)\, n\, \Delta'}{[(m-n)\, n + 1]\, D}$$

Hiervon der wahre Werth von $x_1 = - \frac{D'}{D}$ subtrahirt, gibt

$$- \left\{ \frac{D' + (m-n)\, n\, \Delta'}{[(m-n)\, n + 1]\, D} - \frac{D'}{D} \right\} = - \frac{(m-n)\, n\, (\Delta' - D')}{[(m-n]\, n + 1]\, D}$$

Damit dies mit dem Ausdruck (35) übereinstimme, muss letzterer mit $\frac{\sqrt{(m-n)\, n}}{[(m-n)\, n + 1]\, D^2}$ multiplicirt werden.

Gleiches gilt wenn man irgend welche n von den m Gleichungen in derselben Weise benuzt, wie hier die n ersten; jedesmal erhält man den Factor

$$\frac{\sqrt{(m-n)n}}{[(m-n)n+1]D^2},$$

wo D die betreffende Combinationsdeterminante der von der 0ten Colonne befreiten Tafel (14) ist. Der Factor, mit welchem der Ausdruck (29) für $\nu=1$ multiplicirt werden muss, enthält daher im Nenner die Summe der Quadrate der Combinationsdeterminanten der von der 0ten Colonne befreiten Tafel (14), welche gleich ist der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = A_{00}$$

Da aber diese Determinante von dem Werthe von ν nicht abhängig ist, so ist jetzt allgemein, wenn wir den mittleren Fehler von x_ν mit M_ν bezeichnen:

$$M_\nu = \frac{\sqrt{(m-n)n}}{(m-n)n+1} \frac{\sqrt{A \cdot \mathfrak{A}_{\nu\nu}}}{A_{00}} \quad \ldots \quad (36)$$

§ 21. Zu demselben Resultate wie in § 20 gelangt man, wenn man statt der Differenzen zwischen je zwei besonderen Werthen (22) von x_ν die Differenzen zwischen jedem dieser Werthe und dem Mittelwerthe X_ν bildet und von diesen eine Mittelgrösse nach § 4 nimmt. Der Beweis hierfür lässt sich in ähnlicherweise führen, wie in § 16 für den Fall einer Unbekannten.

§ 22. Ein Ungenauigkeitsmass, welches sich nicht auf eine einzelne Unbekannte, sondern auf alle zusammen und somit auf die Ungenauigkeit der gesammten Messungen bezieht, erhält man auf folgende Weise.

Setzt man die Mittelwerthe (20) der Unbekannten in die Gleichungen (15) ein, so wird man für f_1, f_2 . . . Werthe erhalten, die nicht genau gleich Null sind und von welchen daher eine nach § 4 gebildete Mittelgrösse der Absolutwerthe zur Beurtheilung der Genauigkeit der Mittelwerthe insgesammt geeignet sein wird. Jene Mittelwerthe kann man nun so schreiben:

$$\begin{aligned} x_0 &= c A_{00} \\ x_1 &= c A_{01} \\ x_2 &= c A_{02} \\ &\ldots \\ &\ldots \\ x_n &= c A_{0n} \end{aligned}$$

wo $c = \frac{1}{A_{00}}$ ist. Bilden wir nun die Summe der Fehlerquadrate, so ist

$$f_1^2+f_2^2+\ldots+f_m^2$$
$$+\sum_{p=1}^{p=m} a_0^{p)}x_0(a_0^{p)}x_0+a_1^{p)}x_1+a_2^{p)}x_2+\ldots+a_n^{p)}x_n)$$
$$+\sum_{p=1}^{p=m} a_1^{p)}x_1(a_0^{p)}x_0+a_1^{p)}x_1+a_2^{p)}x_2+\ldots+a_n^{p)}x_n)$$
$$+\sum_{p=1}^{p=m} a_2^{p)}x_2(a_0^{p)}x_0+a_1^{p)}x_1+a_2^{p)}x_2+\ldots+a_n^{p)}x_n)$$

u. s. w.

$$+\sum_{p=1}^{p=m} a_n^{p)}x_n(a_0^{p)}x_0+a_1^{p)}x_1+a_2^{p)}x_2+\ldots+a_n^{p)}x_n)$$
$$=x_0(a_{00}x_0+a_{01}x_1+x_{02}x_2+\ldots+a_{0n}x_n)$$
$$+x_1(a_{10}x_0+a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n)\ldots(37)$$
$$+x_2(a_{20}x_0+a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n)$$

u. s. w.

$$+x_n(a_{n0}x_0+a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n).$$

Setzen wir hierin obige Werthe der x ein, so wird

$$f_1^2+f_2^2+\ldots f_m^2$$
$$=A_{00}(a_{00}A_{00}+a_{01}A_{01}+a_{02}A_{02}+\ldots+a_{0n}A_{0n})c^2$$
$$+A_{01}(a_{10}A_{00}+a_{11}A_{01}+a_{12}A_{02}+\ldots+a_{1n}A_{0n})c^2$$
$$+A_{02}(a_{20}A_{00}+a_{21}A_{01}+a_{22}A_{02}+\ldots+a_{2n}A_{0n})c^2$$

u. s. w.

$$+A_{0n}(a_{n0}A_{00}+a_{n1}A_{01}+a_{n2}A_{02}+\ldots+a_{nn}A_{0n})c^2$$

Die Summen in den Klammern sind sämmtlich $=0$, mit Ausnahme derjenigen in der ersten, welche gleich der Determinante A ist. Demnach ist

$$f_1^2+f_2^2+\ldots+f_m^2=A_{00}\cdot A\cdot\frac{1}{A_{00}^2}=\frac{A}{A_{00}}\ldots(38)$$

Nimmt man hieraus die Wurzel, so hat man abgesehen von dem Factor $m-n$, den man wieder auf andere Weise zu ermitteln suchen müsste, denselben Ausdruck wie (19). Letzterer erscheint also hier als proportional einer Mittelfunction der als Functionen der Coefficienten betrachteten Quadrate der nach geschehener Ausgleichung übrig bleibenden Fehler f_1, f_2 . . .

§ 23. Um die erhaltenen Resultate mit den Gauss'schen zu vergleichen, so erkennt man an der durch den Ausdruck (37) dargestellten Form der Summe der Fehlerquadrate sofort, dass die Werthe von x_1, x_2 . . . x_n ($x_0=1$), für welche die Klammern mit Ausnahme der ersten $=0$ werden, den ganzen Ausdruck zu einem Minimum machen. Denn so lange irgend eine dieser Klammern nicht $=0$ ist, kann man das mit dieser multiplicirte x um eine so kleine Grösse δ vermehren, dass bei entgegengesetzten Vorzeichen dieses δ

auch die Änderung des ganzen Ausdruck entgegengesetzte Vorzeichen erhält. In der That sind die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + \ldots + a_{0n}x_n &= \frac{A}{A_{00}} \\ a_{10}x_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \quad \cdot & \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \quad \cdot & \\ a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned} \quad \ldots (39)$$

mit Ausnahme der ersten die sogenannten Normalgleichungen der Methode der kleinsten Quadrate. Letztere liefert also dieselben Werthe der Unbekannten, wie das hier in § 19 angewandte Verfahren.

Der mittlere Fehler einer Beobachtung ist nach Gauss

$$= \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_m^2}{m-n}},$$

also nach (38)

$$= \sqrt{\frac{A}{(m-n)A_{00}}}$$

was ebenfalls mit dem hier erhaltenen Werthe von M in Gl. (19) übereinstimmt.

Der mittlere Fehler von x_ν bestimmt sich nach Gauss zu

$$\sqrt{\frac{AA_{\nu\nu}}{(m-n)A_0^2}}$$

Dieser Ausdruck ist von M_ν in Gleichung (36) verschieden; er müsste mit

$$\frac{(m-n)n}{(m-n)n+1}$$

multiplicirt werden, um sich darin zu verwandeln. Für kleine Werthe von m und n ist die Verschiedenheit bedeutend. Wenn $m = n$ ist, so erhält der Gauss'sche Ausdruck die Form $\frac{0}{0}$, was dem Umstande zu entsprechen scheint, dass in diesem Falle die Gleichungen zur Beurtheilung der Genauigkeit der Werthe der Unbekannten und überhaupt der Beobachtungen keinen Anhaltspunkt bieten. Der Ausdruck in Gl. (36) dagegen wird in diesem Falle gleich Null, was jedoch mit der Bedeutung desselben als eines Masses des Widerspruchs zwischen den Werthen der Unbekannten x_ν nicht unverträglich ist; denn dieser Widerspruch ist in der That, da für die Unbekannte sich nur ein Werth ergibt, $= 0$.

§ 24. Die Formeln (19) und (36), die nun als die allgemein gültigen zu betrachten sind, mögen jetzt auf die in V und VII behandelten Fälle angewandt werden. Wenn wir in Gleichung (19) $n=1$ nehmen, so wird

$$M = \sqrt{\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} : [(m-1)\, a_{11}]}$$

oder mit den Bezeichnungen unter V

$$M = \sqrt{\frac{1}{(m-1)[a^2]} \begin{vmatrix} [a^2] & [al] \\ [al] & [l^2] \end{vmatrix}},$$

was von Formel (9) in § 13 durch den Mangel des Factors $\frac{1}{2}$ im Nenner abweicht.

Nehmen wir hier $a_1 = a_2 \ldots = a_m = 1$, so wird

$$M = \sqrt{\frac{1}{(m-1)m}(m[l^2] - [l]^2)}$$

was ebenfalls von (5) in § 10 nur durch das fehlende $\frac{1}{2}$ verschieden ist.

In den Formeln (5) und (9) ist also der Factor $\frac{1}{2}$ wegzulassen.

Um auch die Formel (36) auf den Fall unter V anzuwenden, so ist für $n = 1$ $\mathfrak{A}_{\nu\nu} = 1$ zu nehmen; denn der Satz § 8 lautet hier einfach $\begin{vmatrix} ab \\ bc \end{vmatrix} = ac - b^2$. Die Formel wird also

$$M_\nu = \frac{\sqrt{m-1}}{m} \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} [a^2] & [al] \\ [al] & [l^2] \end{vmatrix}}{[a^2]}}$$

Setzt man hier ferner $a_1 = a_2 \ldots = a_m = 1$, so erhält man für den Fall unter VI

$$M_\nu = \frac{\sqrt{m-1}}{m} \sqrt{m[l^2] - [l]^2}$$

VII. Die Ausführung der Rechnung.

§ 25. Nachdem das Ausgleichungsverfahren nach Mittelgrössen theoretisch begründet worden ist, bleibt noch zu zeigen, wie man bei den praktischen Anwendungen die Zahlenrechnungen am bequemsten ausführt, wobei zugleich noch einige theoretische Beziehungen sich ergeben werden.

Zur Berechnung der Unbekannten und der mittleren Fehler sind die für dieselben erhaltenen Determinantenausdrücke nicht geeignet. Man könnte die Gleichungen (39) in der Weise benutzen, wie dies bei der Methode der kleinsten Quadrate gewöhnlich zu geschehen pflegt. Hier soll jedoch, obschon jene Gleichungen mit als Grundlage dienen, ein anderer Weg eingeschlagen werden, der übrigens auch für die Methode der kleinsten Quadrate der zweckmässigste scheint und grade für diese sehr nahe liegt.

Es seien folgende beiden Systeme von Fehlergleichungen gegeben:

0	1	2	n	0	1	2	n
$a_0^{1)}x_0+a_1^{1)}x_1+a_2^{1)}x_2+\ldots+a_n^{1)}x_n=f_1$				$\alpha_0^{1)}x_0+\alpha_1^{1)}x_1+\alpha_2^{1)}x_2+\ldots+\alpha_n^{1)}x_n=\varphi_1$			
$a_0^{2)}x_0+a_1^{2)}x_1+a_2^{2)}x_2+\ldots+a_n^{2)}x_n=f_2$				$\alpha_0^{2)}x_0+\alpha_1^{2)}x_1+\alpha_2^{2)}x_2+\ldots+\alpha_n^{2)}x_n=\varphi_2$			
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
$a_0^{p)}x_0+a_1^{p)}x_1+a_2^{p)}x_2+\ldots+a_n^{p)}x_n=f_p$				$\alpha_0^{q)}x_0+\alpha_1^{q)}x_1+\alpha_2^{q)}x_2+\ldots+\alpha_n^{q)}x_n=\varphi_q$			

Bilden wir für jedes dieser beiden Systeme die Summe der Fehlerquadrate, so erhalten wir zwei homogene quadratische Functionen der Veränderlichen $x_0, x_1, \ldots x_n$. Sollen dieselben identisch sein, so muss irgend eine Coefficientencolonne links mit sich selbst multiplicirt, dasselbe geben, wie die gleich nummerirte Colonne rechts. Ebenso müssen irgend zwei Colonnen links miteinander multiplicirt dasselbe geben, wie die gleichnummerirten Colonnen rechts Wenn also

$$a_i^{1)}a_j^{1)}+a_i^{2)}a_j^{2)}+\ldots+a_i^{p)}a_j^{p)}=a_{ij} \text{ und}$$
$$\alpha_i^{1)}\alpha_j^{1)}+\alpha_i^{2)}\alpha_j^{2)}+\ldots+\alpha_i^{q)}\alpha_j^{q)}=\alpha_{ij}$$

gesetzt wird, so muss immer $a_{ij}=\alpha_{ij}$ sein. Aus beiden Systemen ergeben sich also dann auch dieselben Normalgleichungen (39) und identische Determinanten A, A_{00}, $\mathfrak{A}$. Die als Mittelgrössen bestimmten Werthe der Unbekannten und und (abgesehen von dem constanten Factor) die mittleren Fehler werden daher ebenfalls gleich. Es ist dies diejenige Beziehung, welche Helmert in seinem Werke »Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate« (pag. 165) als Äquivalenz zweier Beobachtungsreihen bezeichnet. Wir wollen nun hiernach die auszugleichenden Fehlergleichungen in einer Weise umformen, welche in naher Beziehung steht zu der von Gauss in den »Disquis. arithm. art. 211« gezeigten Umformung einer homogenen Function 2ten Grades, von welcher Gauss auch in der »Disquisitio de elementis ellipt. Palladis« Gebrauch gemacht hat.

In folgender Zusammenstellung mögen die Gleichungen links die ursprünglichen, diejenigen rechts die umgeformten Fehlergleichungen sein.

$a_1u+b_1v+c_1w+d_1x+\ldots+k_1z+l_1t=f_1$	$\alpha_1u+\beta_1v+\gamma_1w+\delta_1x\ldots+\varkappa_1z+\lambda_1\tau=\varphi_1$
$a_2u+b_2v+c_2w+d_2x+\ldots+k_2z+l_2t=f_2$	$\beta_2v+\gamma_2w+\delta_2x\ldots+\varkappa_2z+\lambda_2\tau=\varphi_2$
u. s. w.	$\gamma_3w+\delta_3x\ldots+\varkappa_3z+\lambda_3\tau=\varphi_3$
	u. s. w.
	$\varkappa_nz+\lambda_n\tau=\varphi_n$
$a_mu+b_mv+c_mw+d_mx+\ldots+k_mz+l_mt=f_m$	$\lambda_{n+1}\tau=\varphi_{n+1}$

Es ist $t=\tau=1$, so dass also in den ursprünglichen Gleichungen $l_1, l_2, \ldots$ die Beobachtungsresultate sind, in den umgeformten Gleichungen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ als solche gelten. Die Berechnung der $\alpha, \beta \ldots$ aus den $a, b \ldots$ kann entweder zeilenweise oder colonnenweise geschehen. Letzteres ist zweckmässiger, weil dann die mit der Rechnung zu verbindenden Proberechnungen sich besser an dieselbe anschliessen. Wenn man also die Bezeichnungen

$$a_1 a_1 + a_2 a_2 \ldots = [aa] \quad \alpha_1 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_2 \ldots = [\alpha\alpha]$$
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \ldots = [ab] \quad \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 \ldots = [\alpha\beta]$$

u. s. w.

anwendet, wo jedoch α_2; α_3, β_3; α_4, β_4, γ_4; u. s. w. $= 0$ sind, so wird man die Gleichungen, aus welchen die α, β, ... zu bestimmen sind, in folgender Reihenfolge auflössen:

$$\begin{aligned}
[aa] &= [\alpha\alpha] \\
[ab] &= [\alpha\beta] \\
[bb] &= [\beta\beta] \\
[ac] &= [\alpha\gamma] \\
[bc] &= [\beta\gamma] \\
[cc] &= [\gamma\gamma] \quad \ldots (40) \\
[ad] &= [\alpha\delta] \\
[bd] &= [\beta\delta] \\
[cd] &= [\gamma\delta] \\
[dd] &= [\delta\delta]
\end{aligned}$$

u. s. w.

In jeder Gleichung werden die Producte links vollständig, die rechts soweit berechnet, als die Factoren derselben bekannt sind. Es ist immer ein Factor und zwar des zuletzt zu bildenden Products noch unbekannt (vgl. § 6). Die Producte links werden addirt, die rechts mit Ausnahme des letzten noch unbekannten davon subtrahirt. Wenn man auch das letzte Product noch subtrahirte, so würde man Null erhalten. Kommt also der unbekannte Factor in dem letzten Producte einmal vor, so findet man ihn, indem man durch den anderen dividirt, wenn zweimal, durch Ausziehen der Quadratwurzel. In letzterer Weise werden α_1, β_2, γ_3 ... bestimmt, in ersterer die übrigen α, β ...

So oft man eine Colonne der α, β ... vollständig bestimmt hat, kann man eine Probercchung vornehmen. Da nämlich die beiderseitigen Summen der Fehlerquadrate identische Functionen werden, so liefern dieselben für beliebige Werthe der Unbekannten gleiche Werthe. Um nun hierauf gegründete Proben machen zu können, bevor noch sämmtliche α, β ... berechnet sind, braucht man nur diejenigen Unbekannten, welche rechts die noch nicht bestimmten α, β ... zu Coeficienten haben, $= 0$ zu nehmen, während man den übrigen beliebige Werthe, am bequemsten $+1$ oder -1 gibt. Man habe z. B. die α, β ... der 5 ersten Colonnen berechnet, so wird sowohl links als rechts die Probe sich auf die ersten 5 Colonnen erstrecken. Man wird links die 5 ersten Zahlen einer jeden Horizontalreihe addiren, die erhaltenen Summen quadriren und diese Quadrate addiren. Dieselbe Rechnung wird man rechts vornehmen (wobei natürlich die α_2; β_2, β_3; γ_2, γ_3, γ_4; u. s. w. mitgezählt werden). Die Resultate müssen überstimmen.

Die ersten 5 Unbekannten sind hier $= +1$, die übrigen $= 0$ angenommen. Man hätte auch einen Theil der ersteren $= -1$ nehmen können, wo dann den

zugehörigen $a, b \ldots \alpha, \beta \ldots$ bei der Addition das entgegengesetzte Zeichen gegeben werden musste. Jede derartige Probe erstreckt sich auf die ganze bis dahin ausgeführte Rechnung.

Nachdem sämmtliche Grössen $\alpha, \beta \ldots$, von welchen bekanntlich keine imaginär werden kann, bestimmt sind, treten jetzt die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w + \delta_1 x + \ldots + \varkappa_1 z + \lambda_1 \tau &= \varphi_1 \\
\beta_2 v + \gamma_2 w + \delta_2 x + \ldots + \varkappa_2 z + \lambda_2 \tau &= \varphi_2 \\
\gamma_3 w + \delta_3 x + \ldots + \varkappa_3 z + \lambda_3 \tau &= \varphi_3 \qquad \ldots (41) \\
\text{u. s. w.} & \\
\varkappa_n z + \lambda_n \tau &= \varphi_n \\
\lambda_{n+1} \tau &= \varphi_{n+1}
\end{aligned}$$

mit der Coefficiententafel

$$\begin{array}{l}
\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1 \ldots \varkappa_1 \lambda_1 \\
\beta_2 \gamma_2 \delta_2 \ldots \varkappa_2 \lambda_2 \\
\gamma_3 \delta_3 \ldots \varkappa_3 \lambda_3 \\
\ldots \ldots \ldots \qquad \ldots (42) \\
\ldots \ldots \ldots \\
\varkappa_n \lambda_n \\
\lambda_{n+1}
\end{array}$$

an die Stelle der ursprünglichen Fehlergleichungen. Um aus denselben die Unbekannten und die Ungenauigkeitsmasse zu bestimmen, geht man am besten unmittelbar von den Gleichungen selbst aus, ohne vorher aus denselben die Normalgleichungen und die Normaldeterminante zu bilden und dann hieraus jene Grössen abzuleiten.

Nach Gl. (19) ist der mittlere Fehler einer Beobachtung

$$M = \sqrt{\frac{A}{(m-n) A_{00}}}$$

Hier ist jetzt A die Summe der Quadrate der Combinationsdeterminanten der Tafel (42), also, da nur eine solche Determinante

$$\begin{vmatrix}
\alpha_1 \beta_1 \ldots \varkappa_1 \lambda_1 \\
\beta_2 \ldots \varkappa_2 \lambda_2 \\
\ldots \ldots \\
\ldots \ldots \\
\varkappa_n \lambda_n \\
\lambda_{n+1}
\end{vmatrix} = \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \ldots \varkappa_n \lambda_{n+1}$$

existirt,

$$A = \alpha_1^2 \beta_2^2 \gamma_3^2 \ldots \varkappa_n^2 \lambda_{n+1}^2.$$

Ferner ist A_{00} die Summe der Quadrate der Combinationsdeterminanten der von den λ befreiten Tafel (42), also

$$A_{00} = \alpha_1^2 \beta_2^2 \gamma_3^2 \ldots \varkappa_n^2.$$

Mithin ist:

$$M = \sqrt{\frac{\lambda_{n+1}^2}{m-n}} = \frac{\lambda_{n+1}}{\sqrt{m-n}}$$

Die Werthe der Unbekannten wird man nicht nach § 19 berechnen. Nach Gleichung (38) ist die Summe der Fehlerquadrate

$$= \frac{A}{A_{00}} = \lambda_{n+1}^2$$

Das letzte Fehlerquadrat $\varphi_{n+1}^2 = \lambda_{n+1}^2$ (letzte der Gleichungen (41)) ist also allein gleich der Summe der Fehlerquadrate. Daraus folgt, dass die übrigen einzeln $= 0$ sind und dass also die Unbekannten bestimmt werden können aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
\alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w + \delta_1 x + \ldots + \varkappa_1 z + \lambda_1 &= 0 \\
\beta_2 v + \gamma_2 w + \delta_2 x + \ldots + \varkappa_2 z + \lambda_2 &= 0 \\
\gamma_3 w + \delta_3 x + \ldots + \varkappa_3 z + \lambda_3 &= 0 \\
\text{u. s. w.} & \\
\varkappa_n z + \lambda_n &= 0
\end{aligned}$$

Der Fehler einer Unbekannten war nach Gleichung (36)

$$M_\nu = \frac{\sqrt{(m-n)n}}{(m-n)n+1} \frac{\sqrt{A\,\mathfrak{A}_{\nu\nu}}}{A_{00}} = \frac{\sqrt{(m-n)n}}{(m-n)n+1} \sqrt{\frac{A}{A_{00}}} \sqrt{\frac{\mathfrak{A}_{\nu\nu}}{A_{00}}}$$

Hier ist wieder

$$\begin{aligned}
A &= \alpha_1^2 \beta_2^2 \ldots \varkappa_n^2 \lambda_{n+1}^2 \\
A_{00} &= \alpha_1^2 \beta_2^2 \ldots \varkappa_n^2
\end{aligned}$$

mithin

$$M_\nu = \frac{\sqrt{(m-n)n}}{(m-n)n+1} \lambda_{n+1} \sqrt{\frac{\mathfrak{A}_{\nu\nu}}{A_{00}}}$$

Ferner ist $\mathfrak{A}_{\nu\nu}$ die Summe der Quadrate der Combinationsdeterminanten der von den λ und auch von den Coefficienten dieser Unbekannten befreiten Tafel (42). Für die Unbekannte w z. B. ist also der Quotient

$$A_{\nu\nu} : A_{00} = \begin{vmatrix}
\alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & \ldots & \varkappa_1 \\
 & \beta_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & \ldots & \varkappa_2 \\
 & & \delta_3 & \varepsilon_3 & \ldots & \varkappa_3 \\
 & & \delta_4 & \varepsilon_4 & \ldots & \varkappa_4 \\
 & & & \varepsilon_5 & \ldots & \varkappa_5 \\
 & & & & \ldots & \\
 & & & & \ldots & \\
 & & & & & \varkappa_n
\end{vmatrix} : (\alpha_1^2 \beta_2^2 \ldots \varkappa_n^2)$$

Nun ist

$$w = \pm \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 & \cdot\cdot & x_1 & \lambda_1 \\ & \beta_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 & \cdot\cdot & x_2 & \lambda_2 \\ & & \delta_3 & \varepsilon_3 & \cdot\cdot & x_3 & \lambda_3 \\ & & \delta_4 & \varepsilon_4 & \cdot\cdot & x_4 & \lambda_4 \\ & & & \varepsilon_5 & \cdot\cdot & x_5 & \lambda_5 \\ & & & & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot\cdot & \cdot & \\ & & & & & x_n & \lambda_n \end{vmatrix} : (\alpha_1 \beta_2 \ldots x_n)$$

Demnach ist $A^{vv} : A_{00}$ gleich der Summe der Quadrate der Coefficienten der einzelnen λ in dem als lineare Function der λ betrachteten Ausdruck für w. Um hiervon zur Berechnung der mittleren Fehler Gebrauch zu machen, wird man also bei der Auflösung der Gleichungen (41) zunächst nur für die Coefficienten der Unbekannten die numerischen Werthe setzen, so dass man die Unbekannten als lineare Functionen der λ erhält.

§ 26. Bei der Ausgleichung nach kleinsten Quadraten leitet man zuerst die Normalgleichungen (39) aus den Fehlergleichungen ab. Aus den Normalgleichungen werden dann durch das Gauss'sche Eliminationsverfahren Gleichungen von der Art wie (41), die reducirten Normalgleichungen erhalten, von welchen jede folgende eine Unbekannte weniger enthält, als die vorhergehende. Die Gleichungen (41) können nun ebenfalls als das Resultat einer solchen Elimination betrachtet werden, weil sie mit den Normalgleichungen gleichbedeutend sind. Die Bestimmung der α, β u. s. w. aus den Gleichungen (40) wäre demnach als die betreffende Eliminationsrechnug zu betrachten. Die Summen auf den linken Seiten der Gleichungen (40) sind nun die Coefficienten der Normalgleichungen. Wenn wir also beide Verfahrungsarten hinsichtlich des Umfanges der Rechenarbeit vergleichen wollen, so ist die Berechnung jener Summen beiden gemeinsam und es brauchen also nur die weiteren Rechnungen verglichen zu werden. Diese Vergleichung möge hier ausgeführt werden für eine Rechnung mit sechs Unbekannten.

Die Normalgleichungen seien:

$$\begin{aligned} a_1 u + b_1 v + c_1 w + d_1 x + e_1 y + f_1 z + l_1 &= 0 \\ b_1 u + b_2 v + c_2 w + d_2 x + e_2 y + f_2 z + l_2 &= 0 \\ c_1 u + c_2 v + c_3 w + d_3 x + e_3 y + f_3 z + l_3 &= 0 \\ d_1 u + d_2 v + d_3 w + d_4 x + e_4 y + f_4 z + l_4 &= 0 \\ e_1 u + e_2 v + e_3 w + e_4 x + e_5 y + f_5 z + l_5 &= 0 \\ f_1 u + f_2 v + f_3 w + f_4 x + f_5 y + f_6 + l_6 &= 0 \\ l_1 u + l_2 v + l_3 w + l_4 x + l_5 y + l_6 + l_7 &= \ldots, \end{aligned} \quad \ldots \quad (43)$$

die reducirten Gleichungen nach dem Gauss'chen Verfahren

$$
\begin{aligned}
a'_1 u + b'_1 v + c'_1 w + d'_1 x + e'_1 y + f'_1 z + l'_1 &= 0 \\
b'_2 v + c'_2 w + d'_2 x + e'_2 y + f'_2 z + l'_2 &= 0 \\
c'_2 w + d'_3 x + e'_3 y + f'_3 z + l'_3 &= 0 \\
d'_4 x + e'_4 y + f'_4 z + l'_4 &= 0 \qquad \ldots (44) \\
e'_5 y + f'_5 z + l'_5 &= 0 \\
f'_6 z + l'_6 &= 0 \\
l'_7 &= \ldots,
\end{aligned}
$$

und nach dem hier beschriebenen Verfahren

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w + \delta_1 x + \varepsilon_1 y + \zeta_1 z + \lambda_1 &= 0 \\
\beta_2 v + \gamma_2 w + \delta_2 x + \varepsilon_2 y + \zeta_2 z + \lambda_2 &= 0 \\
\gamma_3 w + \delta_3 x + \varepsilon_3 y + \zeta_3 z + \lambda_3 &= 0 \\
\delta_4 x + \varepsilon_4 y + \zeta_4 z + \lambda_4 &= 0 \qquad \ldots (45) \\
\varepsilon_5 y + \zeta_5 z + \lambda_5 &= 0 \\
\zeta_6 z + \lambda_6 &= 0 \\
\lambda_7 &= \ldots
\end{aligned}
$$

In dem Schema auf folgender Seite ist nun unter I die Bestimmung der a', b' u. s. w., unter II die der α, β u. s. w. aus den a, b u. s. w. dargestellt. Zwischen je zwei Doppellinien steht die Berechnung einer Zeile der Coefficienten. Unter I enthält jede Zahlencolonne zwischen einer Doppellinie und der nächsten einfachen Linie die Summanden einer Summe mit den links stehenden Vorzeichen. Vor der Summation wird jedoch jeder Summand mit dem rechts auf gleicher Höhe stehenden Bruche multiplicirt. Das Resultat einer jeden Summation ist die unter der Colonne stehende Zahl.

Unter II werden ebenso die in einer Colonne stehenden Grössen (eine einfache Zahl und sonst Producte) mit den links angegebenen Vorzeichen addirt, das Resultat dieser Addition aber durch den rechts stehenden Divisor dividirt. Das Ergebniss dieser Division steht unter der Colonne. Jedoch tritt hier jedesmal an Stelle der ersten Division das Ausziehn einer Quadratwurzel, da z. B. die Division durch β_2 die Grösse β_2 erst liefern soll. Unter I stimmen die $a'_1, b'_1 \ldots$ mit den $a_1, b_1 \ldots$ überein; unter II sind schon $\alpha_1, \beta_1 \ldots$ von $a_1, b_1 \ldots$ verschieden. Unter I ist l_7 die Summe der Fehlerquadrate; unter II ist λ_7 die Quadratwurzel aus derselben. Überhaupt stehen die Resultate unter I und II oder die Gleichungen (44) und (45) in einem solchen Verhältnis zu einander, dass erstere entstehn, wenn man jede der letzteren mit ihrem ersten Coefficienten $(\alpha_1, \beta_2 \ldots)$ multiplicirt. Um sich hiervon zu überzeugen, kann man auf folgende Weise die Rechnung unter I aus derjenigen unter II ableiten.

Man lasse unter II die Divisoren $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3 \ldots$ fort und ersetze dann die über den Doppellinien stehenden $\alpha_1, \beta_1 \ldots$; $\beta_2, \gamma_2 \ldots$; u. s. w. durch $a'_1, b'_1, \ldots$; $b'_2\ c'_2 \ldots$; u. s. w., wo vorläufig noch dahingestellt bleibt, ob diese Grössen jetzt den ebenso bezeichneten unter I gleich sind. Es finden jetzt die Beziehungen Statt:

I

	a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	f_1	l_1	
	a_1'	b_1'	c_1'	d_1'	e_1'	f_1'	l_1'	
+	b_2	c_2	d_2	e_2	f_2	l_2		
−	b_1'	c_1'	d_1'	e_1'	f_1'	l_1'		$(b_1' : a_1')$
	b_2'	c_2'	d_2'	e_2'	f_2'	l_2'		
+	c_3	d_3	e_3	f_3	l_3			
−	c_1'	d_1'	e_1'	f_1'	l_1'			$(c_1' : a_1')$
−	c_2'	d_2'	e_2'	f_2'	l_2'			$(c_2' : b_2')$
	c_3'	d_3'	e_3'	f_3'	l_3'			
+	d_4	e_4	f_4	l_4				
−	d_1'	e_1'	f_1'	l_1'				$(d_1' : a_1')$
−	d_2'	e_2'	f_2'	l_2'				$(d_2' : b_2')$
−	d_3'	e_3'	f_3'	l_3'				$(d_3' : c_3')$
	d_4'	e_4'	f_4'	l_4'				
+	e_5	f_5	l_5					
−	e_1'	f_1'	l_1'					$(e_1' : a_1')$
−	e_2'	f_2'	l_2'					$(e_2' : b_2')$
−	e_3'	f_3'	l_3'					$(e_3' : c_3')$
−	e_4'	f_4'	l_4'					$(e_4' : d_4')$
	e_5'	f_5'	l_5'					
+	f_6	l_6						
−	f_1'	l_1'						$(f_1' : a_1')$
−	f_2'	l_2'						$(f_2' : b_2')$
−	f_3'	l_3'						$(f_3' : c_3')$
−	f_4'	l_4'						$(f_4' : d_4')$
−	f_5'	l_5'						$(f_5' : e_5')$
	f_6'	l_6'						
+	l_7							
−	l_1'							$(l_1' : a_1')$
−	l_2'							$(l_2' : b_2')$
−	l_3'							$(l_3' : c_3')$
−	l_4'							$(l_4' : d_4')$
−	l_5'							$(l_5' : e_5')$
−	l_6'							$(l_6' : f_6')$
	l_7'							

II

	a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	f_1	l_1	$: \alpha_1$
	α_1	β_1	γ_1	δ_1	ε_1	ζ_1	λ_1	
+	b_2	c_2	d_2	e_2	f_2	l_2		$: \beta_2$
−	$\beta_1\beta_1$	$\beta_1\gamma_1$	$\beta_1\delta_1$	$\beta_1\varepsilon_1$	$\beta_1\zeta_1$	$\beta_1\lambda_1$		
	β_2	γ_2	δ_2	ε_2	ζ_2	λ_2		
+	c_3	d_3	e_3	f_3	l_3			
−	$\gamma_1\gamma_1$	$\gamma_1\delta_1$	$\gamma_1\varepsilon_1$	$\gamma_1\zeta_1$	$\gamma_1\lambda_1$			$: \gamma_3$
−	$\gamma_2\gamma_2$	$\gamma_2\delta_2$	$\gamma_2\varepsilon_2$	$\gamma_2\zeta_2$	$\gamma_2\lambda_2$			
	γ_3	δ_3	ε_3	ζ_3	λ_3			
+	d_4	e_4	f_4	l_4				
−	$\delta_1\delta_1$	$\delta_1\varepsilon_1$	$\delta_1\zeta_1$	$\delta_1\lambda_1$				$: \delta_4$
−	$\delta_2\delta_2$	$\delta_2\varepsilon_2$	$\delta_2\zeta_2$	$\delta_2\lambda_2$				
−	$\delta_3\delta_3$	$\delta_3\varepsilon_3$	$\delta_3\zeta_3$	$\delta_3\lambda_3$				
	δ_4	ε_4	ζ_4	λ_4				
+	e_5	f_5	l_5					
−	$\varepsilon_1\varepsilon_1$	$\varepsilon_1\zeta_1$	$\varepsilon_1\lambda_1$					
−	$\varepsilon_2\varepsilon_2$	$\varepsilon_2\zeta_2$	$\varepsilon_2\lambda_2$					$: \varepsilon_5$
−	$\varepsilon_3\varepsilon_3$	$\varepsilon_3\zeta_3$	$\varepsilon_3\lambda_3$					
−	$\varepsilon_4\varepsilon_4$	$\varepsilon_4\zeta_4$	$\varepsilon_4\lambda_4$					
	ε_5	ζ_5	λ_5					
+	f_6	l_6						
−	$\zeta_1\zeta_1$	$\zeta_1\lambda_1$						
−	$\zeta_2\zeta_2$	$\zeta_2\lambda_2$						
−	$\zeta_3\zeta_3$	$\zeta_3\lambda_3$						$: \zeta_6$
−	$\zeta_4\zeta_4$	$\zeta_4\lambda_4$						
−	$\zeta_5\zeta_5$	$\zeta_5\lambda_5$						
	ζ_6	λ_6						
+	l_7							
−	$\lambda_1\lambda_1$							
−	$\lambda_2\lambda_2$							
−	$\lambda_3\lambda_3$							$: \lambda_7$
−	$\lambda_4\lambda_4$							
−	$\lambda_5\lambda_5$							
−	$\lambda_6\lambda_6$							
	λ_7							

$$\alpha_1 = \sqrt{a'_1},\ \beta_1 = \frac{b'_1}{\sqrt{a'_1}},\ \gamma_1 = \frac{c'_1}{\sqrt{a'_1}},\ \ldots$$

$$\beta_2 = \sqrt{b'_2},\ \gamma_2 = \frac{c'_2}{\sqrt{b'_2}},\ \ldots$$

$$\gamma_3 = \sqrt{c'_3},\ \ldots$$

Setzt man jetzt auch an die Stelle der übrigen α, β u. s. w. diese Werthe und hebt dann noch die gemeinsamen Factoren $b'_1 : a'_1$, $c'_1 : a'_1$, $a'_2 : b'_2$ u. s. w. heraus, so hat man genau die Rechnung unter I.

Was nun die Quantität der Rechenarbeit betrifft, so ist unter I und II die Zahl der Additionen, Multiplicationen und Divisionen genau dieselbe. Die Rechenarbeit ist also unter II etwas grösser, weil noch eine Anzahl Quadratwurzeln bestimmt werden müssen gleich der Anzahl der Unbekannten plus 1. Bei einer grösseren Zahl von Gleichungen ist dieser Nachtheil jedoch durchaus unbedeutend und wird reichlich aufgewogen durch die fortwährenden Controlle der Rechnung mittelst sehr geeigneter Proben sowie durch einfachere Bestimmung der mittleren Fehler.

Es sei noch bemerkt, dass gewisse Bedingungen, welche in den verschiedenen Fällen des Ausgleichungsproblems erfüllt sein müssen, damit letzteres einen bestimmten Sinn habe, nicht ausdrücklich erwähnt, sondern als selbstverständlich betrachtet sind. Hierher gehört u. a. die Bedingung, dass, wenn man aus der Coefficiententafel der Fehlergleichungen irgend welche Colonnen auswählt, die Combinationsdeterminanten derselben nicht sämmtlich $= 0$ sein dürfen. Die Nenner der verschiedenen Mittelwerthe werden dann ebenfalls nicht $= 0$. Ferner kann von den Grössen α_1, β_2, γ_3 . . . in § 25 keine $= 0$ werden. Denn wenn z. B. δ_4 die erste wäre, welche den Werth 0 erhielte, so würde auch die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \lambda_1 & \delta_1 \\ & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ & & \gamma_3 & \delta_3 \\ & & & \delta_4 \end{vmatrix} = \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \delta_4$$

$= 0$ werden. Das Quadrat dieser Determinante ist aber gleich der Summe der Quadrate der Combinationsdeterminanten der vier ersten Colonnen der Fehlergleichungen; diese Determinanten würden daher sämmtlich $= 0$ sein.

Lebenslauf.

Geboren bin ich am 29. December 1832 zu Bathey bei Hagen. Die höheren Lehranstalten, welche ich besuchte, waren die Provinzial-Gewerbeschule in Hagen (von Herbst 1848 bis Frühjahr 1850 und von Herbst 1853 bis Herbst 1854) und das Gewerbe-Institut in Berlin. Ich erwarb mir die Berechtigung zum Unterrichte an Frovinzial-Gewerbeschulen, später auch an höheren Stadtschulen (wozu im Jahre 1880 noch die facultas docendi für das Lehramt an Realschulen hinzugefügt wurde) und war dann bis zum Jahre 1883 an entsprechenden Schulanstalten als Lehrer thätig. Im Frühjahr 1883 wurde ich an die landwirthschaftliche Akademie zu Poppeldorf berufen und lehre dort seitdem Mathematik mit Anwendung auf Geodäsie.